

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIA

Supersimetría, estadística y topología

Mauricio Valenzuela U.

Tesis para optar el grado de
Doctor en Ciencias con Mención en Física

Director de Tesis: Dr. Mikhail Plyushchay

SANTIAGO – CHILE
Agosto 2008

Índice general

1. Introducción	5
1.1. El espín	5
1.2. Estadística	6
1.2.1. Induciendo topología no-trivial y estadística	8
1.3. Supersimetría	9
1.4. Supersimetría sin fermiones	10
2. Anyones	12
2.1. Partícula con torsión	15
2.1.1. Cuantización	17
2.2. Descripción de teoría de grupos	19
2.2.1. $osp(2 1)$	20
2.2.2. Ecuaciones espinoriales	24
2.2.3. Sistema de ecuaciones vectoriales	25
2.3. Aspectos geometricos en la descripción de teoría de grupos	28
3. Supersimetría de anyones	31
3.1. Supersimetría de anyones	31
3.2. Contracción de Inönü-Wigner de super-Poincaré y supersimetría sobre el plano no-conmutativo	33
3.2.1. Coordenadas no-conmutativas	36
4. Ecuaciones para campos de infinitas componentes en 3+1 dimensiones	38
4.1. La ecuación de Majorana	38
4.2. $osp(4 1)$	40
4.2.1. Soluciones Masivas	43
4.2.2. Coordenadas de cono de luz en la ecuación de Majorana	45
4.3. La nueva ecuación de Dirac	49
4.4. La ecuación de Staunton	51
5. Supersimetría en la teoría de Majorana	53
5.1. Ecuaciones de Majorana-Klein-Gordon y supersimetría de partículas de espín alto	56
5.1.1. Supermultiplete (J_+, J_-) para $ \Delta J = 1/2$	57
5.1.2. Supermultiplete (J_+, J_-) para $ \Delta J = n + 1/2$ arbitrario	59

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<hr/>	
5.2. Supermultiplete infinito	60
6. Conclusiones y comentarios adicionales	61
6.0.1. Resumen de los resultados principales	61
6.1. Comentarios generales	62
A. Deformación del álgebra de Heisenberg: El operador de reflexión	65
B. Representación de $so(3,2)$	66

Resumen

En esta tesis proponemos sistemas supersimétricos de ecuaciones diferenciales para partículas masivas de espín arbitrario en 2+1 y 3+1 dimensiones, cuyos grados de libertad internos llevan representaciones de dimensión infinita y unitarias del álgebra bosónica de Heisenberg de dimensión uno y dos. En 2+1 dimensiones, la deformación del álgebra de Heisenberg permite la obtención de un supermultiplete de anyones de espín real $(\alpha, \alpha + 1/2)$. El límite no-relativista de esta teoría produce un sistema de ecuaciones de primer orden para una partícula con grados de libertad de espín sobre el plano no-conmutativo, el cual es simétrico ante el grupo de Galileo exótico, extendido con *una* supersimetría. En 3+1 dimensiones, un sistema de ecuaciones diferenciales análogos, describe un supermultiplete de espín $(0, 1/2)$. Después, esta construcción es generalizada para describir un supermultiplete de espín arbitrario $(J, J+1/2)$ y un supermultiplete exótico de espín $(J, J+n+1/2)$. Los supermultipletes estándar, con espines desplazados en $1/2$, en 2+1 y 3+1 dimensiones, son caracterizados por una extensión no-lineal del álgebra de super-Poincaré. La linealidad es *on-shell*, o en el límite de espín alto. En este límite, la representación del álgebra de super-Poincaré (3+1)-dimensional, acepta una carga central tensorial. Así, por primera vez, representaciones bosónicas del álgebra de super-Poincaré son obtenidas. En nuestras construcciones el operador de reflexión actúa como operador de graduación, este es un operador no-local en los grados de libertad internos. Este actúa como un operador de paridad en el espacio interno. Los bosones y fermiones de nuestras teorías son campos escalares o pseudo escalares ante estas transformaciones.

Capítulo 1

Introducción

1.1. El espín

De la isotropía y homogeneidad del espacio-tiempo, se asume como grupo de simetría de los sistemas físicos fundamentales el grupo de Poincaré, es decir, invarianza bajo traslaciones y transformaciones de Lorentz. Las funciones de estado de las partículas, deben llevar entonces representaciones de este grupo y estarán clasificadas por sus operadores de Casimir [1]; la masa y el espín. Observamos que el espín y la masa son presentados aquí a un mismo nivel. Sin embargo, frecuentemente son tratados como si tuvieran diferente estatus. La masa es una cantidad que puede ser modificada dinámicamente, sufriendo correcciones cuánticas o bien ser obtenida a través del mecanismo de Higgs por ejemplo. El espín, sin embargo, es considerado como inalterable. Desde el comienzo damos a los campos un índice de Lorentz (espinorial, vectorial, etc.) y de inmediato determinamos la representación del grupo bajo el cual estos transformarán. Pero el espín de una partícula puede cambiar mediante mecanismos dinámicos. Un fenómeno importante que ilustra esto, es la obtención de espín desde isospín [2, 3]. Ahí, una teoría de Yang-Mills contiene solo campos de espín cero y forman un vector de isospín, los cuales a través del rompimiento espontaneo de simetría $SU(2)$ a $U(1)$, adquieren espín $1/2$. Podríamos decir que bosones condensan a un estado fermiónico, en la fase asimétrica. Por medio de este ejemplo, observamos que el espín de una partícula esta sujeto a la simetría del sistema y no es una propiedad inalterable. Los grados de libertad de espín, así como los grados de libertad de gauge, están asociados a la indeterminación de la función de estado de la partícula en un punto del espacio. Por esto, no es tan raro que grados de libertad de isospín y espín puedan estar relacionados. Introduciendo un campo de multiple componentes podemos producir la multivaluación de la función de estado, que colectivamente, transformarán como un espinor o tensor de Lorentz bajo una representación en particular. A pesar de esto, el sistema podría modificar su espín debido a grados de libertad adicionales. Por ejemplo, es abitual asumir que un campo que satisface la ecuación $(P^2 + m^2)\phi(x) = 0$, es un campo escalar, pero observe que esta ecuación solo determina la masa y no dice nada acerca del espín. Cuando afirmamos que $\phi(x)$ es un campo escalar suponemos que este no tiene índices de Lorentz, y así, transformará trivialmente bajo una representación dada. Sin embargo la multiplicidad de la función $\phi(x)$ puede ser alcanzada en otra manera. Aludiendo por ejemplo a la existencia de dimensiones extras del espacio q , tal que $\phi(x) = \phi(x, q)$, es posible obtener grados de libertad de espín. Solo basta que la función

$\phi(x, q)$ tenga propiedades de transformación definidas bajo la acción de un grupo localmente isomorfo al grupo de Lorentz. Ejemplos con estas propiedades [5, 6, 7, 8, 9] ocurren cuando los operadores de espín son realizados en términos de representaciones unitarias del grupo de Lorentz [10, 11]. Es de valor mencionar que coordenadas extras son empleadas para proporcionar grados de libertad de gauge relacionados a las interacciones del modelo estándar o teorías de gran unificación. Es interesante que los grados de libertad de espín pueden ser obtenidos en forma análoga.

El espín está relacionado a la estadística, y la estadística a las simetrías de sistemas de partículas idénticas. El cambio en el espín de las partículas es equivalente al cambio en la estadística, y así un cambio de la simetría sistema. Esto es una indicación de que espín, estadística y topología son cosas relacionadas. Incluyamos otro ingrediente; *supersimetría* [12, 13, 14, 15], una simetría en el intercambio de bosones a fermiones. Supersimetría requiere en general el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos, así como una degeneración en la masa de estos. El rompimiento espontáneo de simetrías de gauge permite el cambio de la masa (mecanismo de Higgs) y también del espín de las partículas. En consecuencia, esto puede llevar también al *rompimiento de supersimetría* [16, 17]. Esto sugiere que debe haber un conjunto de relaciones no triviales entre topología, estadística y supersimetría:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{topología} & \bullet - - \bullet & \text{estadística} \\
 & \backslash \ / & \\
 & \bullet & \\
 & \text{supersimetría} &
 \end{array} \tag{1.1}$$

1.2. Estadística

Las magnitudes observables en un sistema de partículas idénticas deben ser invariantes cuando estas se intercambian entre sí. El intercambio adiabático de estas debe originar una cierta fase que relaciona la función de estado inicial y final del sistema, es decir, intercambiando las partículas de posiciones q_i y q_j ,

$$\psi(\dots, q_i, \dots, q_j, \dots) = \exp(2\pi i \sigma) \psi(\dots, q_j, \dots, q_i, \dots). \tag{1.2}$$

Aquí, σ es el *parámetro estadístico*, y es característico para cada tipo de partícula, determinando así *estadística* del sistema. La fase depende del espín, de aquí, estadística y espín son cosas relacionadas,

$$\sigma = \text{mod}_1(J). \tag{1.3}$$

Este es el teorema de espín-estadística. En particular, la estadística de Bose-Einstein (bosones) es obtenida para $\sigma = \pm 1$ (espín entero), mientras que es de Fermi-Dirac (fermiones) para $\sigma = \pm 1/2$ (espín semi-entero).

Generalmente, se acepta que la estadística depende de la paridad de Grassmann de los campos que representan las partículas. Es decir, si estos son realizados por variables anti-conmutativas o conmutativas en el nivel clásico, se asocia una estadística de Fermi-Dirac

o de Bose-Einstein respectivamente. Sin embargo esto no es correcto en general; solo en el proceso de segunda cuantización es requerido que campos de bosones (fermiones) deben ser cuantizados con relaciones de (anti)conmutación. Sin embargo, *no hay razón para que estas propiedades sean preservadas en un sistema clásico (y aún en la primera cuantización), ya que no hay necesidad de imponer relaciones de (anti)conmutación para los campos.*

La estadística esta relacionada a una fase y esta fase depende de la geometría del sistema considerado; las funciones de estado de las partículas, sus conexiones de gauge, interacciones y del espacio-tiempo. Estos elementos, caracterizan un cierto *fibrado*.¹ Un fibrado es un manifold y como tal, tiene propiedades geométricas definidas. Muchas de estas propiedades pueden ser obtenidas mirando su *fibrado principal*. Es decir, podemos olvidar el sistema original y observar solo sus grupos de simetría (su conexión de gauge). En este caso, el fibrado principal podría provenir de una teoría cuyos campos son variables de Grassmann pares o impares, y sin embargo su propiedades básicas no varían. *La estadística de las partículas esta codificada en la simetría o topología del sistema de la cual son parte.* Bajo este argumento, no sería sorprendente que fermiones puedan ser representados por campos conmutativos, como ocurre cuando obtenemos espín desde isospín [2, 3]. Encontramos además otros ejemplos, que como un aspecto común exhiben topologías no triviales, relacionados entre otras cosas solitones instantones, y monopolos.

Podemos observar en una manera muy simple la influencia de la topología sobre la estadística. La dimensión del espacio es un invariante topológico y afecta directamente la estadística. De hecho, en dimensión dos², es posible la existencia de partículas con estadística fraccionaria [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24], *anyones*. Los anyones son partículas que interpolan la estadística de bosones y fermiones; cuando dos anyones son intercambiados, aparece una fase compleja con parámetro estadístico arbitrario. En dimensión uno, bosones y fermiones son equivalentes [25, 26, 27](bosonización) y en dimensión cero no es posible definir el intercambio de partículas, así que no hay estadística. Para dimensiones mayores que dos, solo hay bosones y fermiones. No es difícil darse cuenta porque esto es así. El intercambio de partículas idénticas en forma adiabática, define trayectorias cerradas sobre el espacio de configuraciones, y en este intercambio esta involucrado el grupo de rotaciones. Esta acción tendrá diferentes propiedades en diferentes dimensiones. Observemos esto en detalle, primero estudiando un sistema de dos partículas idénticas. La función de estado depende de sus posiciones \vec{x}_1 y \vec{x}_2 . En un espacio de dimensión d ,

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}), \quad \vec{R} = \frac{\vec{x}_2 + \vec{x}_1}{2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{2}.$$

\vec{R} y \vec{r} son las coordenadas de centro de masa y posición relativa a este. Como las partículas son idénticas, el intercambio de estas ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) no puede tener un efecto observable. Este intercambio está bien definido para $r \neq 0$. La distancia entre las partículas no es importante, de hecho podemos fijar $|r|$ y rotar rígidamente el sistema de partículas hasta que cada partícula alcanza la posición de la otra. Las condiciones expuestas son equivalentes a la identificación de puntos antipodales sobre la superficie de la esfera definida por $|r| = \text{constante}$.

¹El espacio tiempo corresponde al espacio base y las funciones de estado son secciones locales que viven en la fibra.

²Nos referimos solo al espacio, ignorando por ahora el tiempo.

Esto define el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{d-1}$. Finalmente, lo que es relevante para la estadística de las partículas son las propiedades del espacio,

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}P^{d-1}, \quad (1.4)$$

en vez de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ definido por (\vec{R}, \vec{r}) . El intercambio de las partículas en un proceso continuo induce trayectorias cerradas en el espacio de configuraciones (1.4), las cuales están clasificadas por el grupo fundamental,

$$\pi_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}P^{d-1}) = \pi_1(\mathbb{R}P^{d-1}). \quad (1.5)$$

Los generadores de estos grupos son los operadores que intercambian las partículas y sus autovalores son las fases características de cada tipo de partícula. El grupo fundamental de espacios proyectivos es bien conocido,

$$d = 1 : \quad \pi_1(\mathbb{R}P^0) \approx 1 \quad (1.6)$$

$$d = 2 : \quad \pi_1(\mathbb{R}P^1) \approx \mathbb{Z} \quad (1.7)$$

$$d \geq 3 : \quad \pi_1(\mathbb{R}P^{d-1}) \approx \mathbb{Z}_2. \quad (1.8)$$

Analicemos este resultado. En $d = 1$ el espacio proyectivo tiene dimensión cero, un punto, el grupo fundamental de un punto es trivial y de aquí solo hay una estadística relevante.³ La realización de fermiones o bosones en este espacio puede ser equivalente, de hecho, esto es bosonización.

En $d = 2$, los generadores del grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \approx \mathbb{Z}$, deben ser interpretados como los operadores que intercambian las partículas n veces, $n \in \mathbb{Z}$. Estas formas de intercambiar las partículas no son equivalentes para diferentes n .

Para $d \geq 3$ solo hay dos tipos de trayectorias, $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, al elemento trivial (1) corresponden bosones, y al no trivial (-1), fermiones. Estas son justamente las fases obtenidas al intercambiar bosones o fermiones.

Un resultado similar se obtiene analizando el grupo de rotaciones en las diferentes dimensiones,

$$\pi_1(SO(1)) = 1, \quad (1.9)$$

$$\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}, \quad (1.10)$$

$$\pi_1(SO(d \geq 3)) = \mathbb{Z}_2. \quad (1.11)$$

1.2.1. Induciendo topología no-trivial y estadística

Observamos ya la posibilidad de realizar diferentes estadísticas según la dimensionalidad del espacio. Otro problema es encontrar los sistemas en que estas ocurren. Por ejemplo, en una teoría bosónica, su espacio de configuraciones es simplemente conectado. Las partículas pueden ser intercambiadas a través de orbitas contractibles del espacio de configuraciones; homotópicas a la identidad del grupo fundamental. Pero podemos romper esta trivialidad

³En realidad este es solo un argumento heurístico; una extensión del análisis en dimensiones mayores. Pero que es consistente con otras descripciones.

introduciendo un elemento externo que induzca una multiple conectividad del espacio de configuraciones. Por ejemplo, interacciones topológicas o términos con derivadas de orden superior (terminos de Hopf, Chern-Simons, torsión de trayectorias, etc.). En esta manera es posible lograr mecanismos de transmutación bosón-fermión [28, 29], o estadísticas anyónicas [23, 30, 31]. También la presencia de una singularidad extendida, debida a un campo magnético confinado, una cuerda cósmica o una cuerda de Dirac (debida al un campo de monopolo) puede producir diferentes clases de homotopia para las trayectorias en el espacio. También coordenadas no-conmutativas pueden producir este efecto.

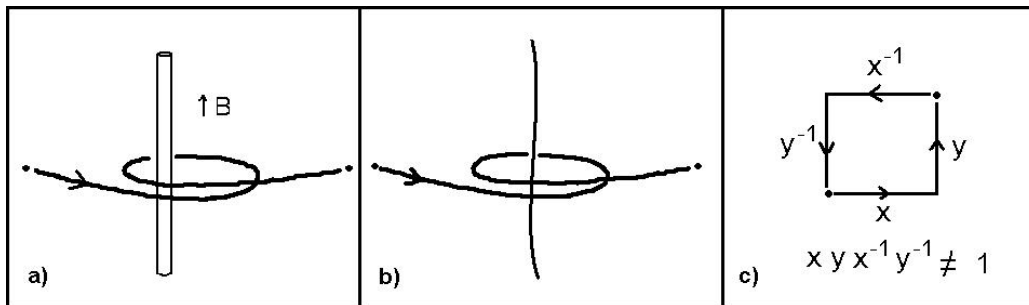


Figura 1.1: La no contractibilidad de caminos cerrados puede ser inducida por: a) Efecto Aharonov-Bohm, b) una cuerda cósmica, c) un espacio no conmutativo, entre otras posibilidades.

1.3. Supersimetría

Bajo de transformaciones de supersimetría, la cantidad conservada llama supercarga, y en conjunto con los generadores de las simetrías internas y del espacio tiempo formarán una superálgebra. Supersimetría fue introducida como una forma de evadir el teorema de Coleman-Mandula [32], que establece la imposibilidad de unificar simetrías internas y del espacio tiempo bajo ciertos axiomas. También la extensión supersimétrica de algunas teorías permiten que estas se vuelvan renormalizables [33]. Supersimetría juega un role importante en muchos contextos, sin embargo se asume que si supersimetría influye en la naturaleza, esta debe ser una simetría rota en las escalas de energía que nos son accesibles, ya que no se observa que existan parejas fermion-boson con la misma masa, una condición de supersimetría impuesta por la estructura de la superálgebra.

Supersimetría ha sido importante en matemática pura por su relación a topología y geometría algebraica. Por ejemplo, a partir de la derivada exterior, conjugación de Hodge y el operador Laplaciano, es posible contruir una representación de mecánica cuántica supersimétrica.⁴ Witten [34] empleo esta estructura para desarrollar un método para el calculo de los números de Betti de una variedad y así, la obtención de información topológica. También supersimetría llevo a conjeturar la existencia de *simetría de espejo*, una simetría que relaciona teorías con superálgebras isomorfas, y que en principio parecen muy diferentes. La importancia radica en que mientras en una teoría esta en un régimen de acoplamiento fuerte su imagen puede estar en el sector de acoplamiento débil, y así valen cálculos perturbativos .

⁴La supercargas son $d + *d*$, $i(d - *d*)$ y el Laplaciano jugando el papel de Hamiltoniano.

Simetría de espejo, es importante en matemática pura, relacionada entre otras cosas a teoría de números y curvas racionales.

1.4. Supersimetría sin fermiones

La característica básica de supersimetría es intercambiar fermiones y bosones en un sistema, dejándolo inalterado. Observamos también que esta simetría entre bosones y fermiones puede manifestarse en otras formas, como en el mecanismo de transmutación bose-fermi o a través de bosonización. Por otra parte, cuando las partículas involucradas son anyones, no es tan claro como, o si es posible, la realización de un sistema supersimétrico. En este escenario, donde las estadística tiene propiedades particulares, podrían existir nuevas posibilidades para la realización de supersimetría, quizás con propiedades inesperadas. Por ejemplo, en $(0+1)D$, supersimetría puede ser realizada sin emplear variables de Grassmann [38, 39, 40], y debido a la equivalencia de bosones y fermiones en $(1+1)D$, supersimetría podría ocurrir en un sistema puramente bosónico [41]. Por otra parte, en $(2+1)D$, los anyones no son bosones ni fermiones, así que ya no es tan claro como trabajaría la supersimetría. Sin embargo, tal sistema es posible contruirlo y la transformación de supersimetría corresponde a un intercambio de anyones cuyos espines difieren en un medio [73, 43]. Decimos entonces que los anyones tienen *estadística relativa de Fermi*.

Las teorías de Yang-Mills mencionadas [2, 3], donde espín se obtiene desde isospín, son consideradas como el análogo de bosonización en $(3+1)D$. Parecería algo extraño que supersimetría pueda manifestarse en un sistema de este tipo, donde la teoría contiene solo campos conmutativos en el nivel clásico. Una consecuencia directa sería la siguiente. Si los campos de espín semientero son de paridad de Grassmann par, las supercargas asociadas también deben serlo. Habrá entonces una representación del álgebra de super-Poincaré construida sin variables de Grassmann. Esto puede parecer no muy relevante, pero considere lo siguiente. En la supersimetría usual, los campos de espín semi-entero y las supercargas son variables de Grassmann impar, las cuales anticonmutan clásicamente. Cada componente de las supercargas son operadores nilpotentes, su cuadrado es cero. Eso significa que la supercarga, teniendo un número finito de componentes, podrá producir un operador polinomial de orden finito máximo. Consecuentemente, el supermultiplete tendrá un número finito de tipos de partículas. Considerando supercargas pares de Grassmann, esto no ocurriría. La misma supercarga podría actuar un número indeterminado de veces sobre un campo, generando un espectro de infinitos partículas, cada una llevando representaciones de espín y masa fija, y que serán parte de un mismo supermultiplete [44]. Esta es una propiedad que podría ser muy relevante en procesos de colisionamiento a energías muy altas. Es sabido que en estos procesos puede aparecer, en principio, un número arbitrario de partículas difiriendo únicamente en su masa y espín (resonancias). Tratando de buscar la teoría más general para estos procesos, uno debería incluir un número de campos arbitrarios. No es difícil imaginar que el lagrangiano sería muy complicado, escribiendo cada término para cada acoplamiento posible. Pero si las partículas están contenidas en un solo campo, todos los acoplamientos estarían dados por un producto escalar del supercampo $(\psi^\dagger\psi)$.

En teoría de cuerdas, se ha argumentado en varias ocasiones [45, 46, 47, 48, 49], que todas las teorías consientes de supercuerdas pueden ser derivadas como teorías efectivas de

la cuerda bosónica, por una compactificación de la cuerda desde 26 a 10 dimensiones. A nivel clásico, la teoría de cuerdas puede ser entendida como una teoría de modelos- σ no lineales sobre una superficie de Riemann, la hoja de mundo de la cuerda. Pero ya vimos que en dos dimensiones, teorías bosónicas y fermiónicas son equivalentes. En este sentido, a priori un podría esperar cierta equivalencia entre las teorías de cuerda bosónica y supercuerdas. De hecho, los fermiones en la teoría bosónica compactificada, aparecen como soluciones solitónicas [45, 46].

Teniendo en cuenta estos hechos, bosonización, transmutación bosón-fermión, transmutación bosón-anyon o espín desde isospín, o supercuerdas como soluciones de la cuerda bosónica, uno podría preguntar: ¿pueden los fermiones ser considerados como provenientes desde teorías más fundamentales con únicamente bosones? Aún más drásticamente, ¿pueden ser los bosones las únicas partículas fundamentales?

Preguntas de este tipo son las que motivan nuestro trabajo de Tesis. Aquí, estudiamos la construcción de sistemas supersimétricos en teorías las cuales no emplean variables de Grassmann [43, 93], y que sin embargo, contienen fermiones o más generalmente, en $(2+1)D$, anyones.

En el capítulo 2 revisamos aspectos generales de teoría de anyones y algunas de las teorías donde tal estadística es realizada.

En el capítulo 3 construiremos un sistema supersimétrico de anyones, el cual lleva una representación del álgebra de super-Poincaré realizada sin variables de Grassmann. En un límite no-relativista, obtendremos un sistema de partículas sobre el plano no-conmutativo simétrico bajo la acción del grupo de Galileo extendido por dos cargas centrales y $N=2$ supercargas.

En 4 revisaremos las ecuaciones de Majorana [5], la *nueva ecuación de Dirac* [7], y la ecuación de Staunton [9]. Las cuales están relacionadas mutuamente, debido a que emplean las representaciones del grupo de Lorentz. Esta es, una representación de dimensión infinita y unitaria descubierta por Majorana [5].

En el capítulo 5 construimos sistemas supersimétricos a partir de las 3 teorías estudiadas el capítulo 4. Obtendremos supermultipletes de espín arbitrario, así como una generalización de supersimetría, donde las partículas en el supermultiplete pueden tener espín desplazado en un número semi-entero arbitrario.

Conclusiones y una discusión general acerca de los tópicos tratados son dados en el capítulo 6.

Capítulo 2

Anyones

La teoría de anyones provee un escenario en el cual topología, teoría de campos, y estadística, actúan y se mezclan en una manera compleja, pero a su vez harmónica y estética. Anyones pueden ser obtenidos por ejemplo como soluciones de instantón en modelos sigma $O(3)$ [21] o $\mathbb{C}P^1$ [54], introduciendo una interacción de Hopf entre las partículas o a través de campos $U(1)$ con términos de Chern-Simons.¹ También los anyones pueden ser descritos en términos de representaciones de dimensión infinitas del grupo de Poincaré [64, 65, 66, 67].

Los anyones han sido importante en problemas relacionados a la física de la materia condensada, proporcionando en forma natural un modelo para el efecto Hall y efecto Hall cuántico fraccionario [57, 58, 59, 60] y superconductividad de altas temperaturas [61, 62]. También ellos están relacionados a teorías sobre espacios no-conmutativos [63, 59].

La existencia de anyones en 2+1 dimensiones se debe a que el grupo de rotaciones en el plano no está cuantizado y a la topología del espacio de configuraciones de partículas idénticas en el plano. Observemos que el origen de la cuantización del espín en $(3 + 1)D$ está en las relaciones de conmutación de los generadores del grupo de rotaciones;

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k.$$

Como esta álgebra es no abeliana, solo podemos diagonalizar simultáneamente el operador de Casimir del grupo de rotaciones junto a uno de sus generadores,

$$\hat{J}^2|J, m\rangle = J(J + 1)|J, m\rangle, \quad J_z|J, m\rangle = m|J, m\rangle, \quad (2.1)$$

Por otra parte, requiriendo estados de norma no negativa; $(\hat{J}_\pm|J, m\rangle)^\dagger(\hat{J}_\pm|J, m\rangle) \geq 0$, produce la condición $2J = \text{entero}$, y esta es la cuantización del espín.² Esto no ocurren en el plano, donde el grupo de rotaciones tiene un solo generador. Así que no aparecen reglas de cuantización y el espín puede tomar valores reales arbitrarios. Además, el espacio de configuraciones de un sistema de partículas idénticas en el plano es múltiplemente conectado, según la discusión dada en (1.4), y esto es lo que permite la estadística de anyones. Veamos esto con un poco más de detalle. Considere el intercambio de dos partículas en el plano, realizadas por el operador η ; una composición de traslaciones y rotaciones como ilustramos a continuación (ver figuras 2.1 y 2.2),

¹Para consultar resúmenes sobre estos tópicos, son recomendables las referencias [55, 56].

²Ver detalles en [56] por ejemplo.

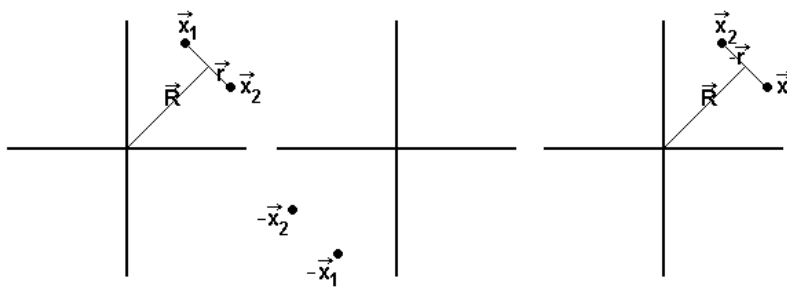


Figura 2.1: Las partículas son intercambiadas rotando primero en ángulo π , y luego trasladando el sistema en $2\vec{R}$.

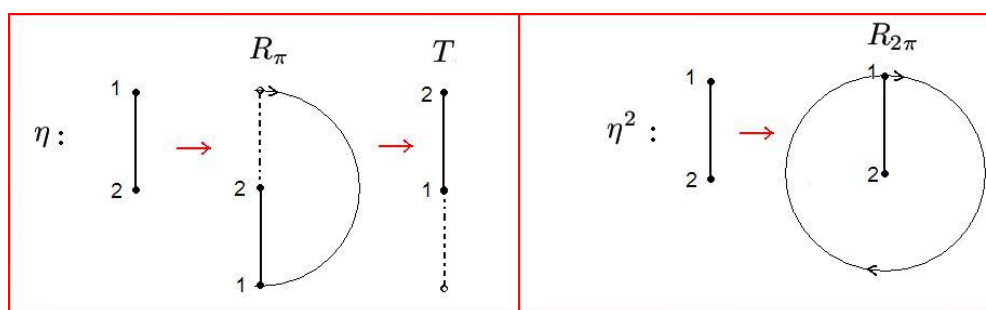


Figura 2.2: La misma operación en sistema de referencia de la partícula 2.

El operador de intercambio de partículas equivalente a una rotación en π seguida de una traslación en $2\vec{R}$; $\eta = T_{2x} \cdot T_{2y} \cdot R_{\pi}$. En tres dimensiones, por ejemplo, la operación de intercambiar las partículas dos veces es equivalente a no intercambiarlas, es decir, $\eta^2 = 1$ (ver figura 2.3). Los autovalores de η sobre la función de estado solo pueden ser $+1$ (bosones) o -1 (fermiones).

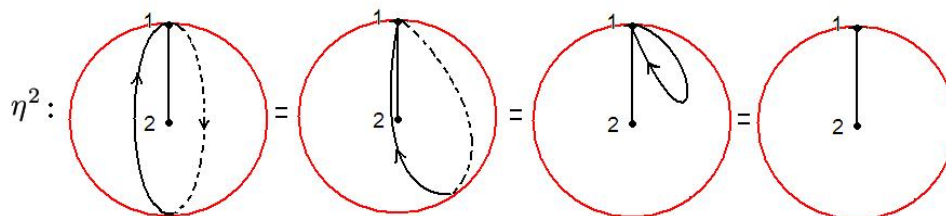


Figura 2.3: En el sistema de referencia de la partícula 2, la partícula 1 realiza una rotación en 2π . Todas las trayectorias posibles definen la superficie de una esfera, y todas son contractibles a un punto ($\pi_1(S^2) = 1$), de aquí, todas las formas de intercambiar dos partículas, son equivalentes.

Sin embargo, en $2+1$ dimensiones, esto no es cierto. Según mostramos en la figura 2.4, intercambiar dos partículas n veces, empleando el operador η^n ($n \in \mathbb{Z}$), es diferente para distintos n .

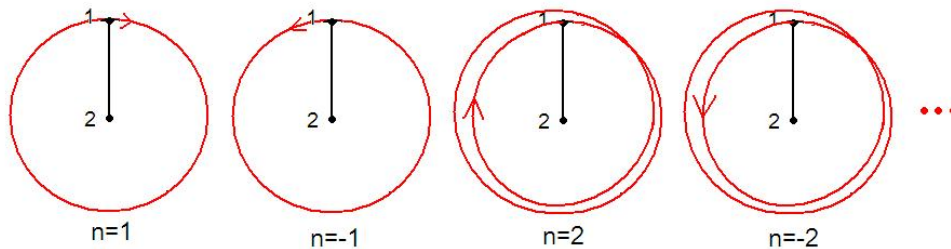


Figura 2.4: Ejemplos de la acción de η^n , en el sistema de referencia de la partícula 2.

Esto también fue observado en en (1.6), donde es relevante que $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$. Los generadores de $\pi_1 \approx \mathbb{Z}$ son justamente los operadores η ; $\mathbb{Z} \approx \{\eta^n / n \in \mathbb{Z}; \eta^n \eta^m = \eta^{n+m}\}$. Consideremos una representación diagramática de la operación de intercambio de partículas en el plano (ver figuras 2.5 y 2.6). Podemos considerar las posiciones iniciales y finales de las partículas como unidas por lazos, que no se pueden cortar. Después de intercambiar las partículas n veces, los lazos formarán una trenza o cadena. La operación inversa es aquella en que la trenza es desenredada.

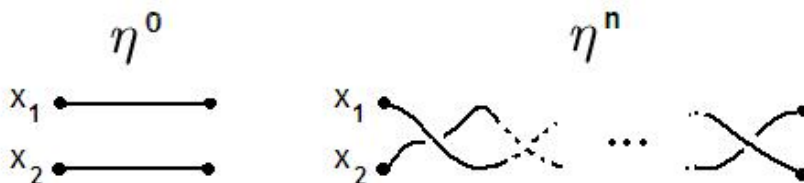


Figura 2.5: η^0 es la operación identidad, las partículas no son intercambiadas. Para η^n arbitrario, los lazos son enrollados n veces.

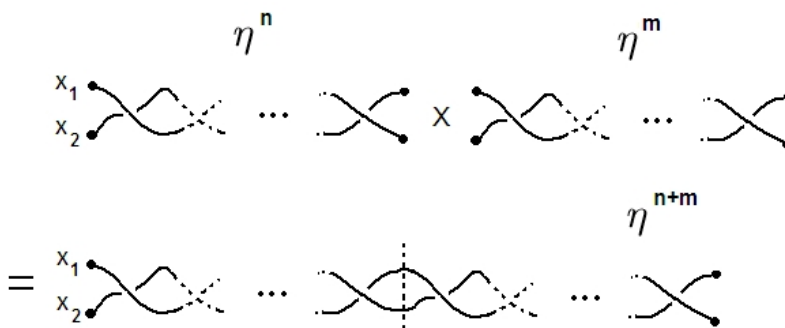


Figura 2.6: Producto de intercambio de partículas.

De hecho, considerando un número N arbitrario de partículas en el plano, las operaciones de intercambio de todas estas forma un grupo de infinitos elementos llamado *grupo de trenza*

(o “braid group”) B_N . A veces la composición del intercambio de partículas puede realizarse en formas equivalentes. Por ejemplo, para tres partículas podemos realizar el diagrama de la figura 2.7, conocido como la relación de Yang-Baxter; una identidad en B_3 .



Figura 2.7: Formas equivalentes de intercambiar 3 partículas. Este es un elemento de B_3 .

Estas ideas son realizadas en diversos modelos de mecánica cuántica, teoría de campos, y teoría de grupos. Por ejemplo, Polyakov mostro [28] que una teoría de gauge σ -nolineal con termino de Chern-Simons,

$$L_{CS} = \frac{\vartheta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad (2.2)$$

Cuando $\vartheta = \pi$, los campos escalares cargados a altas energías se comportan como fermiones a bajas energías. Y si en la teoría se incluye un fermión cargado, este transmutará en dos bosones, de espín cero y uno. Para valores arbitrarios de ϑ los campos cargados adquieren espín fraccionario y estadística de anyones.

A continuación estudiamos anyones en el contexto de teoría de grupos y en el modelo de la partícula de trayectoria de mundo con torsión.

2.1. Partícula con torsión

En la teoría de Polyakov [28], en el formalismo de integral de camino y en espacio euclideo, el campo de Chern-Simons puede ser integrado, produciendo una acción efectiva que involucra un termino proporcional a la torsión de la trayectoria de mundo. Comenzando desde un Lagrangiano similar, pero en espacio de Minkowski, Plyushchay [31] investigo la cuantización canónica de la partícula con torsión. A continuación, estudiamos esta teoría para observar como los anyones emergen. Considere la acción,

$$S = \int (-m + \alpha \tilde{\kappa}) ds. \quad (2.3)$$

Donde m tiene dimensiones de masa y $\alpha > 0$ es adimensional. ds es la diferencial de la longitud de la línea de mundo, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ y $\tilde{\kappa}$ su torsión,

$$\tilde{\kappa} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda} x'_\mu x''_\nu x'''_\lambda}{k^2}, \quad k^2 = \frac{\ddot{x}^2 \dot{x}^2 - (\ddot{x}\dot{x})^2}{(\dot{x}^2)^3}, \quad (2.4)$$

definida en términos de la curvatura k^2 , la cual es mayor que cero para partículas dentro del cono de luz. La curva es parametrizada en términos de τ , y definimos,

$$x'_\mu = dx_\mu/ds, \quad \dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau.$$

El lagrangiano de la partícula puede ser escrito como,

$$L = -\sqrt{-\dot{x}^2} \left(m + \alpha \epsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{\dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \ddot{x}_\lambda}{\dot{x}^2 \dot{x}^2 - (\ddot{x}\dot{x})^2} \right). \quad (2.5)$$

Con el propósito de cuantizar este sistema, es conveniente reducir el orden de las derivadas en el Lagrangiano. Extendiendo el espacio de configuraciones, podemos escribir,

$$\tilde{L} = -mq + \alpha \epsilon_{\mu\nu\lambda} e^\mu n^\nu \dot{n}^\lambda + p^\mu (\dot{x}_\mu - qe_\mu) + l^\mu (\dot{e}_\mu - Qn_\mu) + \frac{\sigma}{2}(e^2 + 1) + \frac{\rho}{2}(n^2 - 1), \quad (2.6)$$

que a través de los mutliplicadores de lagrange p^μ , l^μ , σ y ρ produce los vínculos,

$$\dot{x}_\mu - qe_\mu = 0, \quad \dot{e}_\mu - Qn_\mu = 0, \quad e^2 + 1 = 0, \quad n^2 - 1 = 0, \quad (2.7)$$

que hace de (2.5) y (2.6) sistemas equivalentes con respecto a sus ecuaciones de movimiento. Antes de cuantizar, debemos pasar al formalismo Hamiltoniano. Observamos que ahora las coordenadas en el espacio de configuraciones son dadas por,

$$Q^A = (x^\mu, p^\mu, l^\mu, e^\mu, n^\mu, q, Q, \sigma, \rho), \quad (2.8)$$

y sus momento conjugados,

$$\tilde{P}_A = (P_\mu, p_\mu^{(p)}, p_\mu^{(l)}, p_\mu^{(e)}, p_\mu^{(n)}, \pi^{(q)}, \pi^{(Q)}, \pi^{(\sigma)}, \pi^{(\rho)}). \quad (2.9)$$

Las nuevas coordenadas y momentos, satisfacen los corchetes de Poisson, $\{Q^A, \tilde{P}_B\} = \delta_B^A$, $\{Q^A, Q_B\} = 0 = \{\tilde{P}^A, \tilde{P}_B\}$, produciendo los vínculos primarios; de segunda clase,

$$P_\mu - p_\mu \approx 0, \quad p_\mu^{(p)} \approx 0, \quad p_\mu^{(e)} - l_\mu \approx 0, \quad p_\mu^{(l)} \approx 0, \quad (2.10)$$

y los de primera clase,

$$p_\mu^{(n)} - \alpha \epsilon_{\mu\nu\lambda} e^\nu n^\lambda \approx 0, \quad \pi^{(Q)} \approx 0, \quad \pi^{(\sigma)} \approx 0, \quad (2.11)$$

$$\pi^{(q)} \approx 0, \quad \pi^{(\rho)} \approx 0. \quad (2.12)$$

De los vínculos (2.10) se obtienen los corchetes de Dirac $\{.,.\}^*$, mientras que el Hamiltoniano canónico $H_{can} = q(pe+m) + Q(p^{(e)}n) - \sigma(e^2+1)/2 - \rho(n^2-1)/2$, debemos sumar combinaciones lineales de los vínculos de primera clase (2.11) y (2.12), con funciones arbitrarias del tiempo como coeficientes, lo que define un Hamiltoniano extendido H_{ext} . La permanencia de los vínculos en el tiempo requiere que estos conmuten débilmente con H_{ext} , produciendo un conjunto consistente de vínculos de segunda etapa,

$$pe + m = 0, \quad (2.13)$$

$$e^2 + 1 \approx 0, \quad n^2 - 1 \approx 0, \quad en \approx 0, \quad pn \approx 0, \quad p_\mu^{(e)} \approx 0, \quad (2.14)$$

$$Q - \alpha^{-1} q \epsilon_{\mu\nu\lambda} p^\mu e^\nu n^\lambda \approx 0, \quad \sigma + e^{-2} \left(\frac{\rho}{2n^2} - q(pe) \right) \approx 0. \quad (2.15)$$

Los corchetes de Dirac producen las relaciones no-triviales,

$$\{x^\mu, p^\nu\}^* = g^{\mu\nu}, \quad \{q, \pi^{(q)}\}^* = 1 = \{\rho, \pi^{(\rho)}\}^*, \quad (2.16)$$

$$\{e^\mu, e^\nu\}^* = -\alpha^{-1} \epsilon^{\mu\nu\lambda} e^\lambda, \quad (2.17)$$

e introduciendo la condición de gauge $\rho - \rho_0 \approx 0$ para el vínculo $p^{(\rho)} \approx 0$, obtenemos el Hamiltoniano total,

$$H_{tot} = q(pe + m) + w(\tau)\pi^{(q)}, \quad (2.18)$$

Las ecuaciones de movimiento producidas por este Hamiltoniano tienen 3 tipos de soluciones, masivas, sin masa y taquionicas. La solución para partícula con masa, en el gauge $q - 1 \approx 0$, es,

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0) + \frac{\alpha}{M} e_\mu(0) \sin T(\tau) + \frac{\alpha}{M^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} p^\nu e^\lambda(0) (\cos T(\tau) - 1) - \frac{\alpha m p_\mu}{M^2 M} (\sin T(\tau) - T(\tau)). \quad (2.19)$$

Donde $M \equiv \sqrt{-p^2}$, $T(\tau) \equiv \alpha^{-1} M \tau$, $p_\mu = p_\mu(0) = const$. Una propiedad interesante es que las soluciones taquionicas se obtienen desde (2.19) reemplazando $M \rightarrow iM$, o redefiniendo $M \equiv \sqrt{p^2}$, mientras que las soluciones sin masa se obtienen en el límite $M \rightarrow 0$.

Los vínculos obtenidos, las condiciones de gauge impuestas y la definición de los corchetes de Dirac, permiten reducir el espacio de configuraciones solo a las coordenadas x_μ y e_μ .

Observe ademas que el operador,

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \alpha \epsilon_{\mu\nu\lambda} e^\lambda, \quad (2.20)$$

es una carga conservada, y es identificada con el generador de transformaciones de Lorentz.

2.1.1. Cuantización

La cuantización de este sistema consiste en promover los corchetes de Dirac al conmutador, $-i[.,.]$ y las funciones sobre el espacio de fase a operadores sobre el espacio de Hilbert. Las variables x_μ y P_μ son no-compactas, así que podemos tomar para estas la representación $\hat{P}_\mu = P_\mu$ digonal, $\hat{x}^\mu = i\partial/\partial P_\mu$. Las coordenadas e^μ tienen un topología no trivial debido al vínculo $e^2 + 1 \approx 0$, (ver (2.14)) y su cuantización es más delicada. Además $p_\mu^{(e)} \approx 0$. Seguiremos el enfoque de la referencia [31], donde se emplea el metodo de cuantización geométrica de $SL(2, \mathbb{R})$ [74].

El vínculo $e^2 + 1 = 0$ (2.14), define un hiperboloide de dos hojas. Solo dos componentes de e^μ son independientes y asi podemos parametrizar la hoja superior(inferior), $h_+(h_-)$ como,

$$e_\pm^\mu = (\pm \cosh \rho, \sinh \rho \cos \varphi, \sinh \rho \sin \varphi), \quad \text{en} \quad h_\pm \quad (2.21)$$

En lo que sigue, consideraremos solo la hoja superior del hiperboloide, pero los resultados son fácilmente extrapolados a la hoja inferior. Los corchetes de Poisson (2.17) en h_+ son equivalentes a $\{\cosh \rho, \varphi\}^* = \alpha^{-1}$ y de aquí obtenemos la forma simplectica

$$\omega = \alpha d\varphi \wedge d \cosh \rho, \quad (2.22)$$

necesaria en la cuantización geométrica de este espacio. Con este procedimiento obtendremos finalmente la representación de los generadores de $SL(2, \mathbb{R})$, $\hat{J} \equiv \alpha \hat{e}^\mu$. Podemos pasar de las coordenadas ρ y φ a la coordenada compleja,

$$z = \tanh \frac{\rho}{2} \exp(-i\varphi), \quad 0 \leq |z| < 1.$$

De acá, la parametrización (2.21) es equivalente a

$$e_+^\mu = \left(\frac{1 + z\bar{z}}{1 - z\bar{z}}, \frac{z + \bar{z}}{1 - z\bar{z}}, i \frac{z - \bar{z}}{1 - z\bar{z}} \right). \quad (2.23)$$

La forma symplectica (2.22) es equivalente a,

$$\omega = 2i\alpha \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

Las coordenadas z definen un disco unidad sobre el plano complejo cuyo elemento de volumen es ω , este espacio es equivalente al plano de Lobachevskii, y es una variedad de Kahler con potencial de Kahler, la uno-forma,

$$\theta = -2i\alpha \bar{z}(1 - z\bar{z})^{-1} dz,$$

definida hasta adición de una 1-forma exacta. La prescripción de cuantización geométrica dice que a la función f , corresponde un operador,

$$\hat{f} = i\xi_f + f + \theta(\xi_f), \quad \xi_f \equiv \partial_i f \omega^{ij} \partial_j.$$

Y en nuestro caso corresponde; $\partial_1 = \partial_z$, $\partial_2 = \partial_{\bar{z}}$ y $\omega_{12} = \omega_{z\bar{z}} = \frac{2i\alpha}{(1 - z\bar{z})^2}$. Así obtenemos,

$$-\hat{J}_0 = z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \alpha, \quad \hat{J}_1 = \frac{1+z^2}{2}\partial_z - \frac{1+\bar{z}^2}{2}\partial_{\bar{z}} + \alpha z, \quad (2.24)$$

$$\hat{J}_2 = -i \left(\frac{1-z^2}{2}\partial_z + \frac{1-\bar{z}^2}{2}\partial_{\bar{z}} - \alpha z \right). \quad (2.25)$$

Y satisfacen el álgebra $[\hat{J}^\mu, \hat{J}^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \hat{J}_\lambda$, y su operador de Casimir es

$$-\hat{J}^2 = \alpha(\alpha - 1) - (1 - z\bar{z})(2\alpha - (1 - z\bar{z})\partial/\partial_z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (2.26)$$

Este operador aún no está completamente determinado, debido a que su acción en las variables z , es no trivial. Para obtener una representación irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$ es necesario imponer la condición de polarización

$$(1 - z\bar{z})(2\alpha - (1 - z\bar{z})\partial/\partial_z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi(z, \bar{z}) = 0,$$

que es resuelta por funciones holomorfas $\psi = \psi(z)$. Bajo esta condición, finalmente,

$$-\hat{J}_0 = z\partial_z + \alpha, \quad \hat{J}_1 = \frac{1+z^2}{2}\partial_z + \alpha z, \quad (2.27)$$

$$\hat{J}_2 = -i \left(\frac{1-z^2}{2}\partial_z - \alpha z \right), \quad (2.28)$$

$$-\hat{J}^2 = \alpha(\alpha - 1). \quad (2.29)$$

Estos operadores son hermiticos con respecto a al producto escalar,

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{2\alpha - 1}{\pi} \int_{|z|<1} \overline{\psi_1(z)} \psi_2(z) (1 - |z|^2)^{2\alpha-1} d\bar{z} dz \quad (2.30)$$

Los operadores $-\hat{J}_0$ y $-\hat{J}^2$ son diagonales con respecto a las autofunciones, $\psi(z) = z^n$, y tienen autovalores respectivos $n + \alpha$ y $\alpha(\alpha - 1)$.

Finalmente obtenemos la representación de $SL(2, (R))$; $[\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \hat{J}^\lambda$. Esto produce el análogo cuántico de (2.17) y del vínculo (2.13),

$$(\hat{P}^\mu \hat{J}_\mu - \alpha m)\psi(x) = 0. \quad (2.31)$$

Esta ecuación es, formalmente, el análogo en (2+1)D de la ecuación de Majorana [5], por lo que nos referiremos a ella frecuentemente como “ecuación de Majorana”. Observe que en el caso masivo, podemos pasar al sistema de reposo, donde $P^\mu = (\mu, 0, 0)$. Las soluciones masivas de (2.31) son las funciones $\psi = z^n$ y tienen el espectro de masas,

$$\mu_n = \frac{\alpha m}{\alpha + n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

El análogo cuántico del generador de transformaciones de Lorentz (2.20) es,

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{x}_\mu \hat{P}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{P}_\mu + \epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{J}^\lambda, \quad (2.33)$$

Observaremos en la sección 2.2 que la ecuación (2.31) determina uno de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré, de hecho, corresponde a la condición de Pauli-Lubanski.

2.2. Descripción de teoría de grupos

En (2+1)D, las representaciones del grupo de Poincaré estan determinadas por los operadores de Casimir P^2 y $P^\mu J_\mu$. Las representaciones son fijadas mediante las ecuaciones de Klein-Gordon

$$P^2 + m^2 = 0, \quad (2.34)$$

y el equivalente de la condición de Pauli-Lubanski,

$$(P^\mu J_\mu - \alpha m) = 0, \quad (2.35)$$

a la que nos referiremos como la *ecuación de Majorana en (2+1)D*. Estas ecuaciones son invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré generado por el operador de momento $P_\mu = -i\partial_\mu$ y las transformaciones de Lorentz generadas por

$$\mathcal{J}_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} x^\nu P^\lambda + J_\mu. \quad (2.36)$$

Aquí, x^μ son las coordenadas del espacio tiempo de (2+1)D dimensiones, $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ es el pseudo-tensor de Levi-Civita ($\epsilon^{012} = 1$) y J_μ corresponde a las transformaciones de Lorentz actuando en los grados de libertad internos. Así obtenemos el álgebra de Poincaré,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [\mathcal{J}_\mu, P_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} P^\lambda, \quad [\mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{J}^\lambda,$$

Es deseable que las ecuaciones (2.34) (2.35) sean obtenidas como las ecuaciones de consistencia de un sistema de ecuaciones covariantes más básico, como fue la idea de Dirac. Este problema ha sido enfrentado de varias formas (por ejemplo en [64, 65, 66, 67]) de las cuales aca discutiremos aquellos en [65, 66, 67].³ En estas construcciones será relevante una representación particular de $osp(2|1) \approx so(2,1|1)$, por lo que pasamos su descripción en detalle.

2.2.1. $osp(2|1)$

Consideremos el álgebra de Heisenberg de un oscilador armónico,

$$[a^-, a^+] = 1 \quad \text{donde} \quad a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(q \mp i\eta), \quad [q, \eta] = i. \quad (2.37)$$

Aquí q y η forman el espacio de fase del oscilador, su coordenada y momento respectivamente. Emplearemos la representación en que $\eta = -i\frac{d}{dq}$. Formemos ahora el operador,

$$\mathcal{L}_\alpha = (q, \eta), \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.38)$$

cuyas relaciones de conmutación son,

$$[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta}.$$

El tensor antisimétrico $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$ ($\epsilon^{12} = 1$), proporciona un tensor invariante que puede ser considerado como una métrica de espinores, $A^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}A_\beta$, $A_\alpha = A^\beta\epsilon_{\beta\alpha}$. Además $A^\alpha B_\alpha = -A_\alpha B^\alpha$ para cualquier A_α y B_α . Teniendo en cuenta esto, construimos los operadores,

$$J_\mu = \frac{i}{4}\mathcal{L}^\alpha(\tau_\mu)_\alpha{}^\beta\mathcal{L}_\beta, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (2.39)$$

Explícitamente estos son,

$$J_0 = \frac{1}{4}\{a^+, a^-\}, \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = \frac{1}{2}(a^\pm)^2. \quad (2.40)$$

Aquí las matrices τ son las matrices de Dirac en $(2+1)D$ en la representación de Majorana,

$$(\tau^0)_\alpha{}^\beta = -(\sigma^2)_\alpha{}^\beta, \quad (\tau^1)_\alpha{}^\beta = i(\sigma^1)_\alpha{}^\beta, \quad (\tau^2)_\alpha{}^\beta = i(\sigma^3)_\alpha{}^\beta,$$

las cuales satisfacen,

$$(\tau_\mu)_\alpha{}^\rho(\tau_\nu)_\rho{}^\beta = -\eta_{\mu\nu}\epsilon_\alpha{}^\beta + i\epsilon_{\mu\nu\lambda}(\tau^\lambda)_\alpha{}^\beta, \quad \tau_{\alpha\beta}^\mu = \tau_{\beta\alpha}^\mu, \quad \tau_{\alpha\beta}^{\mu\dagger} = -\tau_{\alpha\beta}^\mu.$$

Los operadores definidos arriba satisfacen la superálgebra $osp(2|1)$,

$$[J_\mu, J_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda}J^\lambda, \quad (2.41)$$

$$\{\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta\} = 4i(J\gamma)_{\alpha\beta}, \quad [J_\mu, \mathcal{L}_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta\mathcal{L}_\beta, \quad (2.42)$$

³Estas serán empleadas en nuestra construcción de anyones supersimétricos [43].

donde (2.41) corresponde al subálgebra de Lorentz.

El operador de Casimir de esta superálgebra es,

$$\mathcal{C} = J_\mu J^\mu - \frac{i}{8} \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}_\alpha \quad (2.43)$$

y toma el valor fijo $\mathcal{C} = \frac{1}{16}$. Mientras que para la subálgebra de Lorentz el operador de Casimir es $J_\mu J^\mu = -\alpha(\alpha - 1) = 3/16$, de donde α solo puede ser $1/4$ o $3/4$. Podemos obtener una representación con α arbitrario⁴ considerando una deformación del álgebra de Heisenberg [68, 69, 70],

$$[a^-, a^+] = 1 + \nu R, \quad R^2 = 1, \quad \{a^\pm, R\} = 0, \quad (2.44)$$

donde ν es un parámetro real de deformación y

$$R = (-1)^N, = \exp(i2\pi J_0 - \frac{1}{4}(1 + \nu)). \quad (2.45)$$

es el operador de reflexión⁵ dado en términos del operador de número,

$$N = \frac{1}{2}\{a^+, a^-\} - \frac{1}{2}(\nu + 1), \quad [N, a^\pm] = \pm a^\pm. \quad (2.46)$$

El cual sobre el espacio de Fock tiene los autovalores,

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \mathcal{F} = \{|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

El operador de reflexión separa el espacio de Fock en dos subespacios,

$$\mathcal{F}_+ = \{|n\rangle_+ = |2n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_- = \{|n\rangle_- = |2n + 1\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2.47)$$

donde toma los autovalores,

$$R\mathcal{F}_\pm = \pm\mathcal{F}_\pm.$$

El subespacio \mathcal{F}_\pm puede ser extraído usando un operador de proyección π_\pm , cuya definición y propiedades son,

$$\pi_\pm \mathcal{F} = \mathcal{F}_\pm, \quad \pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm R), \quad \pi_\pm^2 = \pi_\pm, \quad \pi_+ \pi_- = 0, \quad \pi_+ + \pi_- = 1. \quad (2.48)$$

Las transformaciones de Lorentz son generadas por formas cuadráticas de los operadores de creación y aniquilación, teniendo en cuenta (2.39) y (2.44) es directo que,

$$[J_\mu, R] = 0.$$

⁴ Es importante tener en cuenta que α corresponde al espín de la representación del grupo de Lorentz, pero en general, no coincide con el espín de la representación del grupo de Poincaré, el que es determinado por el vector de Pauli-Lubanski.

⁵El operador de reflexión aparece primero implícitamente en un trabajo de Wigner [71] y luego Yang [72] lo emplea en su forma explícita como operador de paridad.

La relación anterior indica que esta representación, de Fock, el álgebra de Lorentz es reducible. Sin embargo, las transformaciones de Lorentz actúan irreduciblemente sobre los subespacios \mathcal{F}_+ y \mathcal{F}_- . Para más claridad, definamos $J_\mu^\pm = J_\mu \pi_\pm$. Estos conmutan como,

$$[J_\mu^\pm, J_\nu^\pm] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} J^{\pm\lambda} \quad [J_\mu^+, J_\nu^-] = 0.$$

De aquí, J_μ es realmente la suma directa de dos álgebras Lorentz, $J_\mu = J_\mu^+ + J_\mu^-$. La última es trivial, debido a que $\pi_+ + \pi_- = 1$. Obviaremos sin embargo estas relaciones en lo que sigue.

Es importante notar que la superálgebra $osp(2|1)$ no será deformada, solamente el operador de Casimir tomará un valor diferente,

$$\mathcal{C} = \frac{1}{16}(1 - \nu^2). \quad (2.49)$$

Además para la subálgebra de Lorentz obtenemos que el operador de Casimir toma en cada subespacio el valor

$$J_\mu J^\mu \mathcal{F}_\pm = -\alpha_\pm(\alpha_\pm - 1)\mathcal{F}_\pm, \quad \text{donde} \quad \alpha_+ = \frac{1 + \nu}{4}, \quad \alpha_- = \alpha_+ + \frac{1}{2}, \quad (2.50)$$

y

$$J_0|0\rangle_\pm = \alpha_\pm|0\rangle_\pm. \quad (2.51)$$

Así, \mathcal{F}_\pm lleva una representación del grupo de Lorentz con espín α_\pm .

En la representación de Fock, los generadores de $osp(2|1)$ actúan en la siguiente forma:

$$a^+|n\rangle_+ = \sqrt{2(n + 2\alpha_+)}|n\rangle_-, \quad a^+|n\rangle_- = \sqrt{2(n + 1)}|n + 1\rangle_+, \quad (2.52)$$

$$a^-|n\rangle_+ = \sqrt{2n}|n - 1\rangle_-, \quad a^-|n\rangle_- = \sqrt{2(n + 2\alpha_+)}|n\rangle_+, \quad (2.53)$$

$$J_0|n\rangle_\pm = (\alpha_\pm + n)|n\rangle_\pm, \quad J_+|n\rangle_\pm = C_n^{\alpha_\pm}|n + 1\rangle_\pm, \quad J_-|n\rangle_\pm = C_{n-1}^{\alpha_\pm}|n - 1\rangle_\pm, \quad (2.54)$$

$$C_n^{\alpha_\pm} = \sqrt{(2\alpha_\pm + n)(n + 1)}. \quad (2.55)$$

Sin embargo, también podemos usar una representación de Schrödinger para el álgebra de Heisenberg deformada,

$$[q, \eta] = i(1 + \nu R), \quad \{q, R\} = \{\eta, R\} = 0 \quad \text{y} \quad \eta = -i\frac{d}{dq} + i\frac{\nu}{2q}R, \quad (2.56)$$

y luego emplear las definiciones de los operadores de creación y aniquilación, como en (2.37). Vemos entonces que el operador de reflexión R , es el operador de paridad en el plano tendido por q_i : $Rf(q) = f(-q)$, y de aquí, este es un operador no local (una rotación en ángulo π).

Observamos en (2.52) y (2.53), que el coeficiente $n + 2\alpha_+ = n + (1 + \nu)/2$, puede tomar valor cero cuando ν es un entero impar negativo, $\nu = -(2r + 1)$, $r = 1, 2, \dots$. En este caso, hay un ket para el cual $a^+|r\rangle_+ = 0$ (cf. apéndice A). Realmente, hay dos tipos principales de representaciones del álgebra de Heisenberg deformada (y consecuentemente de álgebra de Lorentz) que aparecen para diferentes valores del parámetro de deformación. Cuando $\nu > -1$, (2.44) tiene representaciones infinito-dimensionales y unitarias. El espacio de Fock es dado

por, $|n\rangle = C_n(a^+)^n|0\rangle$, $n = 0, 1, \dots$, $a^-|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$, $R|0\rangle = |0\rangle$, donde $C_n = ([n]_\nu!)^{-1/2}$, $[n]_\nu! = \prod_{l=1}^n [l]_\nu$, $[l]_\nu = l + \frac{1}{2}(1 - (-1)^l)\nu$. El operador J_0 será definido positivo, ya que $\langle n|J_0|n\rangle > 0$.

El álgebra de Heisenberg (2.44) tiene también representaciones de dimensión finita $(2r + 1)$, para $\nu = -(2r + 1)$, $r = 1, 2, \dots$, caracterizándose por las relaciones $a^{-(2r+1)} = a^{+(2r+1)} = 0$. Los operadores a^+ and a^- son conjugados, $(\Psi_1, a^- \Psi_2)^* = (\Psi_2, a^+ \Psi_1)$, con respecto al producto escalar,

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \bar{\Psi}_{1n} \Psi_2^n, \quad \bar{\Psi}_n = \Psi^{*k} \hat{\eta}_{kn}, \quad (2.57)$$

proporcionado por la matriz $\hat{\eta} = \text{diag}(1, -1, -1, +1, +1, \dots, (-1)^{r-1}, (-1)^{r-1}, (-1)^r, (-1)^r)$ y donde $\Psi^n = \langle n|\Psi\rangle$. En forma matricial, $(a^+)_{mn} = \langle m|a^+|n\rangle$, $(a^-)_{mn} = \langle m|a^-|n\rangle$, de donde,

$$(a^+)_{mn} = A_{n+1} \delta_{m-1,n}, \quad (a^-)_{mn} = B_n \delta_{m+1,n}. \quad (2.58)$$

Aquí, $A_{2k+1} = -B_{2k+1} = \sqrt{2(r-k)}$, $A_{2k} = B_{2k} = \sqrt{2k}$. Por otra parte, para los operadores J_\pm , obtenemos

$$(J_+)_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2r} (a^+)_{mk} (a^+)_{kn}, \quad (J_-)_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2r} (a^-)_{mk} (a^-)_{kn}. \quad (2.59)$$

Es ilustrativo observar un ejemplo. Para, $\nu = -3$, $A_0 = B_0 = 0$, $A_1 = A_2 = -B_1 = B_2 = \sqrt{2}$, $A_3 = B_3 = 0$. Así,

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad a^- = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

mientras que para los generadores de Lorentz,

$$J_0 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Esta representación actúa sobre el espacio vectorial;

$$\mathcal{F}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \mathcal{F}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.62)$$

El operador de reflexión y los proyectores son ahora,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Cada subespacio lleva una representación de espín $\alpha_+ = -1/2$ y $\alpha_- = 0$, respectivamente. El subespacio de espín $\alpha_- = 0$ es invariante, como debe ser, bajo las transformaciones de

Lorentz; $J_\mu^- = J_\mu \pi_- = 0$. En el subespacio \mathcal{F}_- , $J_\mu^+ = J_\mu \pi_+$ son equivalentes hasta un factor, a las matrices de Dirac en una representación de Majorana,

$$J_0^+ = \frac{1}{2}\sigma^3, \quad J_1^+ = -\frac{i}{2}\sigma^2, \quad J_2^+ = \frac{i}{2}\sigma^1. \quad (2.64)$$

Solo en este caso, para espín 1/2, obtenemos también un álgebra de Clifford, $\{2J_\mu, 2J_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$.

Es interesante que el álgebra de Heisenberg deformada, puede ser usada para la construcción de representaciones matriciales de $so(2, 1)$ de espín arbitrario, entero o semi-entero.

2.2.2. Ecuaciones espinoriales

Basado en la representación (2.41), (2.42) de $so(2, 1)$, se proponen el sistema de ecuaciones espinoriales [67],

$$\mathcal{D}_\alpha \Psi = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha = (P^\mu \tau_\mu - m)_\alpha{}^\beta \mathcal{L}_\beta, \quad (2.65)$$

con \mathcal{L}_α definido en (2.38). Esta ecuación emplea el álgebra de Heisenberg deformada (AHD) (2.44). También para el álgebra usual de Heisenberg, es decir $\nu = 0$, Sorokin y Volkov [73] mostraron que un sistema de ecuaciones análogas describe partículas de espín 1/4 y 3/4.

El operador \mathcal{D}_α transforma covariantemente, como un espinor,

$$[\mathcal{J}_\mu, \mathcal{D}_\alpha] = \frac{1}{2}(\tau_\mu)_\alpha{}^\beta \mathcal{D}_\beta.$$

Por lo tanto, si (2.65) es válida en algún sistema de referencia, lo será también cualquier otro. Obtenemos condiciones de consistencia las operaciones,

$$[D_\alpha, D_\beta] = -i\varepsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu R)(P^2 + m^2), \quad (2.66)$$

$$\frac{i}{4}L^\alpha D_\alpha = (PJ - m\frac{1}{4}(1 + \nu R)), \quad (2.67)$$

las cuales deben ser cero. Observamos que, mientras (2.66) impone la ecuación de Klein-Gordon, (2.67) produce una ecuación equivalente al (2.35), fijando el operador de Casimir de espín. Esto implica que si la ecuación (2.65) tiene solución, estas serán masivas, y con un espín dado a través de (2.67). El grupo de Lorentz actúa irreduciblemente sobre los subespacios \mathcal{F}_+ y \mathcal{F}_- definidos en (2.47). Podemos considerar entonces una expansión de las soluciones de (2.65) en cada espacio irreducible del grupo de Lorentz,

$$\Psi_\pm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_\pm^k(x) |k\rangle_\pm, \quad \in \mathcal{F}_\pm, \quad (2.68)$$

donde $|k\rangle_\pm$ son definidos en (2.47). Que es un análogo de la expansión de campos de Dirac usual en una base de vectores (10), (01), por ejemplo. Buscamos soluciones en cada subespacio para la ecuación propuesta,

$$D_\alpha \Psi_\pm(x) = 0. \quad (2.69)$$

Pasando al sistema de reposo podemos verificar la no trivialidad de las soluciones de (2.65). Consideremos entonces $P^\mu = (m, 0, 0)$, de donde (2.65) produce,

$$[\mathcal{D}_\alpha \Psi]_{rest} = -\sqrt{2}m \begin{pmatrix} -a^- \\ ia^- \end{pmatrix} \Psi_{rest}. \quad (2.70)$$

La única solución posible, hasta normalización, es $\Psi_{rest} \approx |0\rangle$, $|0\rangle = |0\rangle_+ \in \mathcal{F}_+$. Por lo tanto, solo existen soluciones no-triviales en el subespacio \mathcal{F}_+ , para el cual el sistema de ecuaciones (2.66) y (2.67) son equivalentes a,

$$(P^2 + m^2)\Psi_+ = 0, \quad (PJ - m\alpha_+)\Psi_+ = 0.$$

De acá, la partícula tiene masa m y espín $\alpha_+ = \frac{1}{4}(1 + \nu)$, de acuerdo a las ecuaciones (2.34), (2.35). Para representaciones unitarias del álgebra de Heisenberg, *i.e.* $\nu > -1$, el operador J_0 es definido positivo, lo cual implica que (2.65) tiene soluciones solo para energías positivas, $P^0 > 0$. Cuando el parámetro de deformación toma los valores $\nu = -(2r + 1)$, $r = 1, 2, \dots$, el campo Ψ_+ tiene $2r + 1$ componentes, puede tener energía positiva o negativa y su espín es $\alpha_+ = -1/2, -1, -3/2, \dots$

α_+ corresponde al espín en el casimir del grupo de Lorentz $J^2\mathcal{F}_+ = -\alpha_+(\alpha_+ - 1)\mathcal{F}_+$. Recordando que $J^2\mathcal{F}_- = -\alpha_-(\alpha_- - 1)\mathcal{F}_-$, sería interesante obtener una solución no trivial en el sector de \mathcal{F}_- . Dado que $\alpha_- - \alpha_+ = 1/2$, el desplazamiento relativo de los espines en un medio, sugiere que los campos en cada sector podrían estar relacionados por una transformación de supersimetría. Con el propósito de obtener un sistema de partículas supersimétricas, tiene sentido la investigación de algún otro sistema de ecuaciones el cual tenga soluciones no triviales en ambos subespacios, \mathcal{F}_+ y \mathcal{F}_- . Pasamos entonces a la discusión de tal sistema de ecuaciones.

2.2.3. Sistema de ecuaciones vectoriales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones [66],

$$V_\mu^{(\alpha)}\Psi^{(\alpha)} = 0, \quad V_\mu^{(\alpha)} = \alpha P_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\lambda}P^\nu J^\lambda + mJ_\mu. \quad (2.71)$$

Como condiciones de consistencia obtenemos que las relaciones siguientes,

$$J^\mu V_\mu^{(\alpha)} = (\alpha - 1)(PJ - \alpha m), \quad (2.72)$$

$$P^\mu V_\mu^{(\alpha)} = \alpha(P^2 + m^2) + m(PJ - \alpha m), \quad (2.73)$$

$$i\epsilon^{\mu\nu\lambda}P_\nu J_\lambda V_\mu^{(\alpha)} = \alpha(\alpha - 1)(P^2 + m^2) + (PJ + (\alpha - 1)m)(PJ - \alpha m), \quad (2.74)$$

deben producir cero actuando sobre los campos físicos en (2.71). Nos damos cuenta entonces que estos campos deben satisfacer la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Majorana en (2+1)D, (2.34) y (2.35). De aquí las soluciones $\Psi^{(\alpha)}$ llevan un representaciones irreducibles del grupo de Poincaré, de masa m y espín α . Además estas tendrán energía de signo definido si se elige una representación unitaria del grupo de Lorentz. Aquí consideramos la representación (2.39), (2.40) (que emplea el álgebra de Heisenberg deformada (2.44)). Asumimos nuevamente

una expansión de las soluciones como en (2.68). De la reducibilidad de la representación del grupo de Lorentz, podemos proponer para cada subespacio las ecuaciones,

$$V_\mu^{(\alpha_+)}\Psi_+(x) = 0, \quad \Psi_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^+ |n\rangle_+ \in \mathcal{F}_+, \quad (2.75)$$

$$V_\mu^{(\alpha_-)}\Psi_-(x) = 0, \quad \Psi_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^- |n\rangle_- \in \mathcal{F}_-. \quad (2.76)$$

Donde

$$\alpha_- - \alpha_+ = 1/2. \quad (2.77)$$

En el sistema de reposo,

$$[V_0^{(\alpha_\pm)}\Psi^{(\alpha_\pm)}]_{rest} = m(J_0 - \alpha_\pm)\Psi_{rest}^{(\alpha_\pm)} = 0, \quad (2.78)$$

$$[V_1^{(\alpha_\pm)}\Psi^{(\alpha_\pm)}]_{rest} = \frac{m}{2}(a^-)^2\Psi_{rest}^{(\alpha_\pm)} = 0, \quad (2.79)$$

$$[V_2^{(\alpha_\pm)}\Psi^{(\alpha_\pm)}]_{rest} = -\frac{im}{2}(a^-)^2\Psi_{rest}^{(\alpha_\pm)} = 0. \quad (2.80)$$

Estas ecuaciones son satisfechas por $\Psi_{rest}^{(\alpha_\pm)} \approx |0\rangle_\pm$, $|0\rangle_+ = |0\rangle$, $|0\rangle_- = |1\rangle$, de acuerdo con las relaciones,

$$J_0|0\rangle_\pm = \alpha_\pm|0\rangle_\pm, \quad (a^-)^2|0\rangle_\pm = 0, \quad J_\mu J^\mu|0\rangle_\pm = -\alpha_\pm(\alpha_\pm - 1)|0\rangle_\pm. \quad (2.81)$$

En el sistema de reposo, los campos $\Psi^{(\alpha_\pm)}$ son proporcionales a los estados de n más bajo pertenecientes a \mathcal{F}_\pm (2.47) en el espacio de Fock \mathcal{F} . Sin embargo, en un sistema de referencia arbitrario, todos los estados de \mathcal{F}_\pm pueden ser alcanzados. Podemos obtener también representaciones no-unitarias de dimensión finita para el valor correspondiente del parámetro de deformación, las cuales pueden tener ambos signos de energía.

Es interesante observar la identidad satisfecha por el operador \mathcal{D}_α en (2.65):

$$-\frac{1}{4}\mathcal{L}^\alpha(\tau_\mu)_\alpha{}^\beta\mathcal{D}_\beta = \frac{(1 + \nu R)}{4}P_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\lambda}p^\nu J^\lambda + mJ_\mu. \quad (2.82)$$

La cual actuando sobre \mathcal{F}_+ es solo una ecuación de consistencia equivalente a,

$$-\frac{1}{4}\mathcal{L}^\alpha(\tau_\mu)_\alpha{}^\beta\mathcal{D}_\beta\Psi_+ = V_\mu^{(\alpha_+)}\Psi_+.$$

De aquí las ecuaciones de movimiento (2.65) y (2.75) son equivalentes en \mathcal{F}_+ (2.75), es decir, tienen las mismas soluciones. Sin embargo, el operador $V_\mu^{(\alpha)}$ satisface la identidad

$$W^\mu V_\mu^{(\alpha)} \equiv 0, \quad W_\mu = (\alpha - 1)^2 p_\mu - i(\alpha - 1)\epsilon_{\mu\nu\lambda}p^\nu J^\lambda + (pJ)J_\mu, \quad (2.83)$$

la que indica que solo dos componentes de $V_\mu^{(\alpha)}$ son independientes. Sus tres componentes son sin embargo, necesarias para covariancia explicita del sistema de ecuaciones, garantizando la consistencia de la teoría. En este sentido, el sistema de ecuaciones espinoriales (2.65) es más

económico, solo tiene 2 componentes. El número de componentes independientes de cada ecuación, corresponde al número de ecuaciones necesarias para fijar el espín y la masa del grupo de grupo de Poincaré, es decir 2.

Las componentes de la ecuación (2.71) pueden ser convenientemente combinadas,

$$V_0^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (P_+ J_- - P_- J_+) - (\alpha P_0 + m J_0) \quad (2.84)$$

$$V_{\pm}^{(\alpha)} = -(-\alpha \pm J_0) P_{\pm} + (m \pm P_0) J_{\pm}, \quad (2.85)$$

donde $V_{\pm} = V_1 \pm iV_2$. Estas relaciones pueden ser escritas en las componentes de la expansión de sus soluciones. Consideremos entonces (2.75), (2.76);

$$[\alpha_{\pm}(p^0 - m) - nm]\psi_n^{\pm} + \frac{1}{2} [C_n^{\alpha_{\pm}} p_+ \psi_{n+1}^{\pm} - C_{n-1}^{\alpha_{\pm}} p_- \psi_{n-1}^{\pm}] = 0, \quad (2.86)$$

$$-np_+ \psi_n^{\pm} + C_{n-1}^{\alpha_{\pm}} (m - p^0) \psi_{n-1}^{\pm} = 0, \quad (2.87)$$

$$(2\alpha_{\pm} + n)p_- \psi_n^{\pm} + C_n^{\alpha_{\pm}} (m + p^0) \psi_{n+1}^{\pm} = 0. \quad (2.88)$$

Aquí hemos empleado (2.54) y (2.55), y una representación de momento (p^{μ} son los autovalores de P^{μ}) y $p_{\pm} = p_1 \pm ip_2$. Manipulando (2.87) y (2.88), es posible obtener (2.86), lo que refleja la dependencia de los sistemas de ecuaciones vectoriales (2.75) (o (2.76)). La ecuación de espín (2.35) también puede ser presentada en esta forma de componentes,

$$[p^0(\alpha + n) - \alpha m]\psi_n + \frac{1}{2}[C_n^{\alpha} p_+ \psi_{n+1} + C_{n-1}^{\alpha} p_- \psi_{n-1}] = 0.$$

En la representación D_{α}^{+} , Ec. (2.88) nos permite escribir la relación de recurrencia,

$$\psi_{n+1} = -\frac{2\alpha + n}{C_n^{\alpha}} \frac{p_-}{p^0 + m} \psi_n. \quad (2.89)$$

La substitución de (2.89) en Ec. (2.87) muestra que que cada componente satisface la ecuación de Klein-Gordon, Empleando reiteradamente (2.88) obtenemos,

$$\psi_n(p) = (-1)^n \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha + n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha)}} \left(\frac{p_-}{p^0 + m}\right)^n \psi_0(p), \quad (2.90)$$

$$\psi_0(p) = \delta\left(p^0 - \sqrt{p_i^2 + m^2}\right) f(p_i). \quad (2.91)$$

Es conveniente tener presente el equivalente sistema de ecuaciones independiente,

$$\sqrt{n+2\alpha}(m+p_0)\psi_n - \sqrt{n+1}p_+\psi_{n+1} = 0, \quad (2.92)$$

$$\sqrt{n+2\alpha}p_-\psi_n + \sqrt{n+1}(m-p_0)\psi_{n+1} = 0, \quad (2.93)$$

obtenido después de algunas manipulaciones.

2.3. Aspectos geometricos en la descripción de teoría de grupos

En la cuantización geométrica de $SL(2, \mathbb{R})$ se obtuvo una representación holomorfa (2.27), (2.28) y (2.29), del álgebra de Lorentz en (2+1)D. Estos operadores actúan sobre el espacio vectorial de funciones z^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ las cuales son ortogonales con respecto al producto escalar (2.30), definido en el disco unidad del plano complejo. Uno puede expandir una función (holomorfa) arbitraria sobre el disco como,

$$f(x, z) = \sum_{n=0} f_n(x) z^n. \quad (2.94)$$

Considerando los coeficientes de la expansión como funciones de las coordenadas del espacio de Minkowski (2+1)-dimensional, las funciones $f(x, z)$ pueden ser vistas como funciones multivaluadas de x con componentes $f_n(x)$. Estas, dotan al campo $f(x)$ con grados de libertad de espín, los que transforman bajo la representación de los generadores J_μ obtenidas. La ecuación de Majorana (2.35) mezcla los grados de libertad de espín y de espacio tiempo a través del operador $P^\mu J_\mu$. Las ecuaciones de Majorana y Klein-Gordon restringen las funciones $f_n(x)$ determinando una representación del grupo de Poincaré.

Por otra parte, el isomorfismo de álgebras, $so(2, 1) \sim sp(2)$, permite representar el grupo de Lorentz como los simplectomorfismos de un espacio de fase de dos dimensiones. En el caso estudiado aquí, este corresponde al espacio de fase del oscilador armónico. En este caso, la multivaluación de una función sobre el espacio de Minkowski es obtenida expandiendo esta sobre los autoestados del oscilador

$$f(x, q) = \sum_{n=0} f_n(x) H^n(q), \quad (2.95)$$

donde $H_n(q)$ son los polinomios de Hermite y q es la coordenada del oscilador. Es clara la equivalencia con la representación de Fock: $f(x) = \sum_{n=0} f_n(x) |n\rangle$. Observamos que en el primer caso el grupo de Lorentz actúa como el grupo conforme sobre el disco unidad (equivalente al plano de Lovachevsky) y en el segundo caso actúa como los simplectomorfismos del espacio de fase del oscilador armónico. Efectivamente las soluciones de las ecuaciones de Majorana $\psi(x, z)$ o $\psi(x, q)$, viven una extensión del espacio de Minkowski,

$$\mathcal{M}_3 \times F, \quad (2.96)$$

donde F es el disco unidad en el primer caso, o es el fibrado tangente a la recta $T(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2$ en el segundo caso. Sobre este espacio el grupo de Lorentz actúa trivialmente,

$$SO(2, 1)_{\mathcal{M}_3} \times SO(2, 1)_F, \quad (2.97)$$

y los grados de libertad de espín son proporcionados por $SO(2, 1)_F$. A nivel del álgebra, las transformaciones completas de Lorentz son generadas por,

$$so(2, 1)_{\mathcal{M}_3} \oplus so(2, 1)_F = \{ \mathcal{J}_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} x^\nu p^\lambda + J_\mu \}$$

Los anyones estudiados aquí tienen espín α , y coincide con el espín del grupo de Lorentz $SO(2, 1)_F$, $J^\mu J_\mu = -\alpha(\alpha - 1)$.

Es posible extender más aún estos sistemas al otorgar a los campos un índice adicional tal que transforme bajo otra representación del grupo de Lorentz, es decir, reemplazando $f_n(x) \rightarrow f_n^A(x)$, finalmente estos campos transformaran bajo una representación del grupo generada por,

$$\{\mathcal{J}_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} x^\nu p^\lambda + J_\mu + \tilde{J}_\mu\},$$

donde \tilde{J}_μ actúa sobre los grados de libertad A . El espín del campo sería $\alpha + \tilde{\alpha}$, donde $J^\mu J_\mu = -\alpha(\alpha - 1)$ y $\tilde{J}^\mu \tilde{J}_\mu = -\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - 1)$. Sin embargo, es necesario construir un sistema de ecuaciones que efectivamente fije el espín. Estos han sido construidos para $\tilde{\alpha} = -1/2$ [65] y para $\tilde{\alpha} = -1$ [64]. En esos sistemas el índice adicional A de los campos es espinorial (ver (6.2) y (6.3)) o, respectivamente, vectorial.

Frecuentemente se asume que la descripción de teoría de grupos de anyones y aquellas en que la estadística anyonica es adquirida a través de un campo de gauge $U(1)$, son de naturaleza completamente diferente. En la segunda clase de teorías involucran fibrados no triviales, por ejemplo, soluciones de tipo soliton en los modelos- σ $O(3)$, o $\mathbb{C}P^1$. Sin embargo, podemos observar que la representaciones unitarias del grupo de Lorentz estudiadas aquí, involucran el mismo tipo de fibrados.

Considere las variables $Z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tal que,

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = 1. \quad (2.98)$$

Esto define un espacio AdS_3 incrustado en \mathbb{C}^2 , que puede ser parametrizado por,

$$z_1 = \cosh \frac{\rho}{2} \exp(i\varphi_1), \quad z_2 = \sinh \frac{\rho}{2} \exp(i\varphi_2). \quad (2.99)$$

El espacio AdS_3 puede ser mapeado a la hoja superior del hiperboloide, h_+ , mediante,

$$e_+^\mu = (|z_1|^2 + |z_2|^2, z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1, -i(z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1)) \quad (2.100)$$

$$= (\cosh \rho, \sinh \rho \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \sinh \rho \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (2.101)$$

tal que $e^2 + 1 = 0$. Definiendo $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, esta es la parametrización (2.21) empleada en la cuantización geométrica del hiperboloide. Observamos que esta definición de e_+^μ queda determinada solo hasta multiplicación por una fase, $Z \rightarrow \exp(i\beta)Z$, es decir $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \beta$. De hecho,

$$e_+^\mu : AdS_3 \rightarrow h^\pm, \quad (2.102)$$

Es una proyección y define AdS_3 como un fibrado $U(1)$ sobre h^\pm . Esto es análogo al fibrado de Hopf para S^3 , un fibrado $U(1)$ sobre S^2 , que aparece en los modelos- σ $O(3)$ o $\mathbb{C}P^1$ y en teorías con monopolos magnéticos (*cf.* [2, 3]).

$\mathbb{C}P^1$ puede ser incrustado en AdS_3 , identificando $Z \sim \lambda Z$. Las coordenadas inhomogeneas de $\mathbb{C}P^1$ son,

$$\xi_+ \equiv z_1/z_2, \quad \text{en} \quad U_+ = \{(z_1, z_2) / z_2 \neq 0\}, \quad (2.103)$$

$$\xi_- \equiv z_2/z_1, \quad \text{en} \quad U_- = \{(z_1, z_2) / z_1 \neq 0\}. \quad (2.104)$$

Las coordenadas inhomogeneas de $\mathbb{C}P^1$ definen una proyección,

$$\xi_{\pm} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

que con la restricción (2.98), es equivalente a,

$$\xi_{\pm} : AdS_3 \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad (2.105)$$

$$\xi_+ = \tanh \frac{\rho}{2} \exp(-i\varphi), \quad |\xi_+| \leq 1, \quad (2.106)$$

$$\xi_- = \coth \frac{\rho}{2} \exp(+i\varphi), \quad |\xi_-| \geq 1, \quad (2.107)$$

$$(2.108)$$

donde $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. De aquí AdS_3 puede ser visto como fibrado $U(1)$ sobre $\mathbb{C}P^1$. Desde AdS_3 podemos obtener h^+ (2.102) y $\mathbb{C}P^1$ (2.105), esto indica que debe haber un mapeo $\mathbb{C}P^1 \rightarrow h^+$. Efectivamente, este mapeo es dado por (2.23), con $z = \xi_{\pm}$.

Los $U(1)$ son caracterizados por $\pi_1(U(1)) \approx \pi_1(SO(2)) \approx \mathbb{Z}$, esto es justamente lo que después de cuantización geométrica proporciona representaciones multivaluadas del grupo de Lorentz. Esto significa; la parametrización usada en la cuantización geométrica no esta determinada en forma univoca, pero pertenecen a diferentes clases de equivalencias dadas por $\pi_1(SO(2))$. Finalmente esto es lo que permite la estadística y espín fraccionario. Este es un aspecto común que relacionando ambas descripciones de anyones, modelos- σ $O(3)$ - $\mathbb{C}P^1$ y la descripción de teoría de grupos.

También aquí hemos observamos que extendiendo las dimensiones del espacio-tiempo (ver (2.96), (2.97)), es posible obtener grados de libertad de espín, en una forma similar a como grados de libertad de gauges son obtenidos por mecanismos de Kaluza-Klein.

Capítulo 3

Supersimetría de anyones

Hemos visto que los sistemas de ecuaciones en (2+1)D, (2.75) y (2.76) basado en la representación unitaria de $osp(2|1)$ estudiada en 2.2.1, tienen soluciones cuyos espines difieren en $1/2$ (2.77). Además, el operador de reflexión, en los respectivos subespacios actúa como operador de graduación y caracteriza las soluciones de espín α_+ y α_- por sus autovalores, $+1$ o -1 . Es natural preguntar si estos estados pueden o no formar un supermultiplete. Parte de esta tesis, consistió justamente en mostrar esto [43]. A continuación, exhibimos estos resultados.

3.1. Supersimetría de anyones

Volviendo al sistema de ecuaciones (2.75), (2.76), observamos que estas describen partículas de espín α_+ y α_- , $\alpha_- - \alpha_+ = 1/2$. Ambas soluciones pueden ser tratadas como las componentes de un supermultiplete. Para esto, consideremos la descomposición de un campo arbitrario en todo el espacio de Fock del oscilador armónico,

$$\Psi(x) = \Psi_+(x) + \Psi_-(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n^+ |n\rangle_+ + \psi_n^- |n\rangle_-). \quad (3.1)$$

Aquí hemos separado las componentes pertenecientes a cada subespacio \mathcal{F}_{\pm} . Podemos imponer para cada componente $\Psi_{\pm}(x)$ las ecuaciones (2.75), (2.76). En ese caso, (3.1) lleva una representación reducible del grupo de Poincaré, cuyos subespacios irreducibles tienen la misma masa m y espines α_+ y α_- . Podemos identificar el supermultiplete, teniendo en cuenta (2.48), $\pi_{\pm}|n\rangle_{\pm} = |n\rangle_{\pm}$ y $\pi_{\mp}|n\rangle_{\pm} = 0$. De aquí, obtenemos

$$\pi_{\pm}\Psi(x) = \Psi_{\pm}(x). \quad (3.2)$$

Teniendo esto en cuenta para (3.1), proponemos el sistema de ecuaciones [43],

$$V_{\mu}\Psi(x) = 0, \quad V_{\mu} = \hat{\alpha}p_{\mu} - i\epsilon_{\mu\nu\lambda}p^{\nu}J^{\lambda} + mJ_{\mu} \quad (3.3)$$

$$\text{y} \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{4}(2 + \nu - R). \quad (3.4)$$

El operador V_{μ} es nada más que la suma de las proyecciones de las ecuaciones (2.75) y (2.76) a sus respectivos subespacios,

$$V_{\mu} = V_{\mu}^{(\alpha_+)}\pi_+ + V_{\mu}^{(\alpha_-)}\pi_- = \frac{1}{4}(2 + \nu - R)p_{\mu} - i\epsilon_{\mu\nu\lambda}p^{\nu}J^{\lambda} + mJ_{\mu}. \quad (3.5)$$

Expresado en otra forma,

$$\pi_{\pm} V_{\mu} \Psi(x) = V_{\mu}^{(\alpha_{\pm})} \Psi_{\pm}(x) = 0.$$

La solución de este sistema de ecuaciones, es solo la combinación lineal de las soluciones de (2.75) y (2.76), ya dadas.

La ecuación de Klein-Gordon y una generalización de la ecuación de Majorana (2.35) pueden ser producidas como condiciones de consistencia de (3.3),

$$(P^2 + m^2)\Psi = 0, \quad (PJ - \hat{\alpha}m)\Psi = 0. \quad (3.6)$$

El operador de supercarga hermitico asociado al supermultiplete (3.1) es [43],

$$Q_{\alpha} = \frac{i}{\sqrt{2m(1+\nu)}} \left((P\tau)_{\alpha}^{\beta} - mR\epsilon_{\alpha}^{\beta} \right) \mathcal{L}_{\beta}, \quad (3.7)$$

y es observable con respecto a nuestro sistema de ecuaciones,

$$[Q_{\alpha}, V_{\mu}] \approx 0.$$

De aquí, Q_{α} , mapea estados físicos $\Psi_{+}(x)$ a los estados físicos $\Psi_{-}(x)$ y vice-versa.

El operador de reflexión R juega el papel de operador de graduación,

$$[R, P_{\mu}] = [R, \mathcal{J}_{\mu}] = 0, \quad \{R, Q_{\alpha}\} = 0.$$

La supercarga Q_{α} y los generadores de transformaciones de Poincaré satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad [\mathcal{J}_{\mu}, P_{\nu}] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} P^{\lambda}, \quad [\mathcal{J}_{\mu}, \mathcal{J}_{\nu}] = -i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{J}^{\lambda}, \quad (3.8)$$

$$[P_{\mu}, Q_{\alpha}] = 0, \quad [\mathcal{J}_{\mu}, Q_{\alpha}] = \frac{1}{2}(\tau_{\mu})_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} &= -2i(P\tau)_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{2i}{m(1+\nu)} [(J\tau)_{\alpha\beta}(P^2 + m^2) - 2(p\tau)_{\alpha\beta}(PJ - \hat{\alpha}m)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es claro de ec. (3.6) que, *on-shell*¹, el anti-conmutador (3.10) toma la forma

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = -2i(P\tau)_{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

Resultando el álgebra de super-Poincaré con $N = 1$; (3.8)-(3.11). Esta es una simetría de las ecuaciones de movimiento (3.3). Enfatizamos que acá, no hemos empleado variables de Grassmann en la construcción de la supercarga Q_{α} . Los campos Ψ_{+} y Ψ_{-} describen anyones masivos con espines α_{+} y $\alpha_{-} = \alpha_{+} + \frac{1}{2}$ de energía positiva y tienen una estadística *relativa* de Fermi.

El operador

$$\mathcal{C} = P^{\mu} \mathcal{J}_{\mu} + \frac{i}{8} Q^{\alpha} Q_{\alpha} \quad (3.12)$$

¹Aquí y en lo que sigue, empleamos “*on-shell*” (“*off-shell*”), para referirnos a las condiciones satisfechas sobre (fuera) de las superficie en el espacio de fase definida por las ecuaciones de movimiento.

es el operador de Casimir de la superálgebra (3.8)-(3.11). Para los estados que satisfacen las ecuaciones (3.3), el superespín $\mathcal{S} = \frac{1}{m}\mathcal{C}$ toma el valor

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(\alpha_+ + \alpha_-). \quad (3.13)$$

Empleando representaciones finitas o infinitas del álgebra de Heisenberg, las ecuaciones (3.3) describen universalmente un sistema supersimétrico de partículas masivas de espín arbitrario.

Observemos también, que el álgebra de super-Poincaré (3.8)-(3.11) puede ser obtenida *off-shell*, cuando $\nu \rightarrow \infty$, es decir el límite de espín infinito. Esto es muy significativo cuando se obtiene el límite no relativista de nuestra teoría. Pasamos al estudio de esto a continuación. Estos resultados fueron obtenidos en [43].

3.2. Contracción de Inönü-Wigner de super-Poincaré y supersimetría sobre el plano no-conmutativo

Es sabido que el límite no relativista, corresponde a una contracción de Inönü-Wigner del álgebra de Poincaré, produciendo el álgebra de Galileo. En particular, Jackiw y Nair [75] mostraron que si este límite se realiza de una forma precisa, es posible obtener dos cargas centrales para el grupo de Galileo, la masa y adicionalmente una carga central relacionada a los grados de libertad de espín, dando la estructura exótica al grupo de Galileo. Retornando al sistema de anyones construido, podemos considerar el límite de Jackiw-Nair (JN) el cual es,

$$c \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad \frac{s}{c^2} = \kappa, \quad (3.14)$$

donde c es la velocidad de la luz, s es el espín de la partícula relativista y κ es una constante, identificada con una carga central en el grupo de Galileo (que observaremos pronto). Para nuestro propósito, necesitamos tener en cuenta los detalles de la representación del álgebra de Heisenberg deformada. En el caso unitario $\nu > -1$ los coeficientes de normalización de los kets en el espacio de Fock (ver en apéndice (A.5)) son

$$C_n = ([n]_\nu!)^{-1/2}, \quad [n]_\nu! = \prod_{l=1}^n [l]_\nu, \quad [l]_\nu = l + \frac{1}{2}(1 - (l)^l)\nu.$$

Así, consistentemente con (2.44) y equivalentemente a (2.52) y (2.53) tenemos

$$a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]_\nu}|n+1\rangle, \quad a^-|n\rangle = \sqrt{[n]_\nu}|n-1\rangle. \quad (3.15)$$

Introduzcamos los operadores de creación y aniquilación no-deformados b^\pm (ver (A.1) y (A.2)),

$$[b^-, b^+] = 1, \quad N_b|n\rangle_b = n|n\rangle_b, \quad N_b = b^+b^-.$$

Podemos representar los estados en los subespacios \mathcal{F}_\pm como

$$|n\rangle_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |n\rangle_b, \quad |n\rangle_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |n\rangle_b. \quad (3.16)$$

Entonces $R = \sigma_3 \otimes 1$, σ son las matrices de Pauli. De (2.52) y (2.53), en la representación (3.16), los operadores a^\pm actúan como (cf. (2.52), (2.53))

$$a^+ = \sqrt{2} \left(\sigma_+ \otimes b^+ + \sigma_- \otimes \sqrt{N_b + 2\alpha_+} \right), \quad a^- = \sqrt{2} \left(\sigma_- \otimes b^- + \sigma_+ \otimes \sqrt{N_b + 2\alpha_+} \right), \quad (3.17)$$

donde $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$. Usando $\{\sigma_+, \sigma_-\} = 1$, $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$, tenemos $[a^-, a^+] = 1 + \nu\sigma_3 \otimes 1$. En esta representación los generadores de Lorentz (2.41) son

$$J_0 = 1 \otimes (N_b + \alpha_+) + \frac{1}{4}(1 - \sigma_3) \otimes 1, \quad (3.18)$$

$$J_+ = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) \otimes b^+ \sqrt{N_b + 2\alpha_+} + \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) \otimes b^+ \sqrt{N_b + 2\alpha_+ + 1}, \quad (3.19)$$

$$J_- = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) \otimes \sqrt{N_b + 2\alpha_+} b^- + \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) \otimes \sqrt{N_b + 2\alpha_+ + 1} b^-. \quad (3.20)$$

Omitiendo el símbolo de producto directo, (3.19) y (3.20) pueden ser escritos alternativamente

$$J_+ = b^+ \sqrt{N_b + 2\alpha_+ + \frac{1}{2}(1 - \sigma_3)}, \quad J_- = \sqrt{N_b + 2\alpha_+ + \frac{1}{2}(1 - \sigma_3)} b^-. \quad (3.21)$$

Recuperando la dependencia sobre la velocidad de la luz, c , por medio del cambio $m \rightarrow mc$, las ecuaciones diferenciales (2.92), (2.93) para los campos Ψ_+ y Ψ_- son representadas como

$$((mc + P_0)\sqrt{2J_0 - N_b} - P_+ b^-) \Psi = 0, \quad (3.22)$$

$$(P_- \sqrt{2J_0 - N_b} + (mc - P_0)b^-) \Psi = 0. \quad (3.23)$$

Estas son nada más que las componentes $V_+ \Psi = 0$ y $V_- \Psi = 0$ de (3.3).

Tomemos ahora el límite de JN (3.14) con $s = \alpha_+ = \frac{1}{4}(1 + \nu)$. Entonces de (3.17) encontramos que

$$\frac{a^+}{\nu^{1/2}} \rightarrow \sigma_- \otimes 1, \quad \frac{a^-}{\nu^{1/2}} \rightarrow \sigma_+ \otimes 1, \quad (3.24)$$

esto significa que después del rescalamiento y en el límite $\nu \rightarrow \infty$, los operadores de creación y aniquilación se transforman en operadores fermiónicos (ver también [70]). Además,

$$\frac{J_\pm}{c} \rightarrow \sqrt{2\kappa} b^\pm. \quad (3.25)$$

Por otro lado, en límite JN, la energía y el momento angular divergen. El momento angular *renormalizado* $J_0 - \alpha_+$, produce en el límite JN, el operador $N_b + \frac{1}{4}(1 - \sigma_3)$. Siguiendo la referencia [63], definimos los operadores de velocidad

$$v_\pm = -\sqrt{\frac{2}{\kappa}} b^\pm, \quad [v_-, v_+] = 2\kappa^{-1}.$$

Los *boost* de Galileo son definidos como $\mathcal{K}_i = -\frac{1}{c}\epsilon_{ij}\mathcal{J}_j$. Entonces, para las rotaciones y boost de Galileo obtenemos en el límite JN,

$$\mathcal{J} = \epsilon_{ij}x_i P_j + \frac{1}{2}\kappa v_+ v_- + \frac{1}{4}(1 - \sigma_3), \quad \mathcal{K}_i = m x_i - t P_i + \kappa \epsilon_{ij} v_j. \quad (3.26)$$

Estos operadores producen el álgebra de Galileo exótica, ver (3.30), (3.31). Ecs. (3.24) y (3.25) muestra que el límite JN extrae desde a^\pm grados de libertad ordinarios bosonicos y fermiónicos.

Para identificar el Hamiltoniano y la ecuación de onda producidos en el límite JN por nuestro sistema supersimétrico, ponemos en Ecs. (3.22), (3.23) $P_0 = -ic^{-1}\partial_t$ y $\Psi = e^{-imc^2t}\Phi$, y tomamos el límite (3.14). Esto resulta en las ecuaciones

$$(i\partial_t - \frac{1}{2}P_+v_-)\Phi = 0, \quad (P_- - mv_-)\Phi = 0, \quad (3.27)$$

donde Φ es un campo de dos componentes sobre el cual actúan las matrices de espín σ . Cada componentes descompuesta en los estados del espacio de Fock, $\Phi_\pm = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^\pm |n\rangle$. La segunda ecuación en (3.27) es un vinculo que permite, como en el caso relativista, presentar las componentes de n más alto en términos de las primeras,

$$\phi_n^\pm = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{P_-}{m} \right)^n \phi_0^\pm.$$

La substitución de la segunda ecuación en (3.27) en la primera muestra que cada componente ϕ_n^\pm satisface la ecuación de Schrödinger. Sumando la primera ecuación a la segunda (multiplicada por $-\frac{1}{2}v_+$ a la izquierda) nos permite obtener el operador hermitico

$$\mathcal{H} = P_i v_i - \frac{1}{2}v_+v_-, \quad (3.28)$$

$v_\pm = v_1 \pm iv_2$, que identificamos como el Hamiltoniano del sistema no relativista. Notemos que \mathcal{H} es lineal en el operador de momento. La ecuación de onda y el Hamiltoniano coinciden con aquellos en [63] y corresponden a una partícula exótica sobre el plano no-conmutativo [59, 60].

Obtengamos ahora el límite JN de nuestra supercarga. Recuperando la constante para la velocidad de la luz c en Q_\pm y definiendo entonces,

$$Q_\pm = c^{-1/2}Q_\pm.$$

Teniendo en cuenta (3.24), encontramos que en el límite JN la supercarga se reduce a

$$Q_- = -2i\sqrt{m}\sigma_+, \quad Q_+ = 2i\sqrt{m}\sigma_-. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, la simetría de nuestro sistema está dada por el álgebra

$$[\mathcal{K}_i, P_j] = im\delta_{ij}, \quad [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = -i\kappa\epsilon_{ij}, \quad (3.30)$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{H}] = iP_i, \quad [\mathcal{J}, P_i] = i\epsilon_{ij}P_j, \quad [\mathcal{J}, \mathcal{K}_i] = i\epsilon_{ij}\mathcal{K}_j, \quad (3.31)$$

y las relaciones de anti-conmutación

$$[\mathcal{J}, Q_\pm] = \pm \frac{1}{2}Q_\pm, \quad \{Q_+, Q_-\} = 4m, \quad (3.32)$$

$$[\mathcal{K}_i, Q_\pm] = [P_i, Q_\pm] = [\mathcal{H}, Q_\pm] = 0, \quad Q_\pm^2 = 0. \quad (3.33)$$

El operador de Casimir de esta extensión del álgebra de Galileo exótica es,

$$\mathcal{C}_1 = P_i^2 - 2m\mathcal{H}, \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{J} - \epsilon_{ij}\mathcal{K}_i P_j + \kappa\mathcal{H} - \frac{1}{16}[\mathcal{Q}_+, \mathcal{Q}_-], \quad (3.34)$$

donde \mathcal{C}_2 es el límite JN del superspín $\mathcal{S} = m^{-1}\mathcal{C}$ con \mathcal{C} dado por Ec. (3.12). Sobre los estados físicos, i.e. que satisfacen (3.27), estos operadores de Casimir toman los valores $\mathcal{C}_1 = 0$ y $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{4}$.

La extensión supersimétrica con $N = 1$, (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) del álgebra de Galileo exótica fue discutida en [76, 77].

3.2.1. Coordenadas no-conmutativas

La ecuación de Klein-Gordon puede ser utilizada para eliminar el parámetro de masa en la versión supersimétrica de la ecuación de Majorana (3.6), obteniendo la ecuación adimensional;

$$\chi_s \Psi \equiv \left(\frac{PJ}{\sqrt{-P^2}} - (\alpha_+ \Pi_+ + \alpha_- \Pi_-) \right) \Psi = 0. \quad (3.35)$$

El operador P^2 es invertible, ya que la partícula es masiva. La ecuación de Klein-Gordon y (3.35) forman un conjunto de vínculos de primera clase. En el cuadro de Heisenberg la ecuación de Klein-Gordon produce la ley de evolución, con respecto al parámetro de evolución τ , de una partícula libre;

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = i \left[\frac{P^2 + m^2}{2m}, x^\mu \right] = \frac{P^\mu}{m}.$$

La ecuación (3.35) debe ser interpretada como un generador de transformaciones de gauge, parametrizadas por τ' . Para la coordenada x^μ obtenemos,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau'} = i[\chi_s, x^\mu] \neq 0.$$

Un operador físico, digamos O , debe ser invariante de gauge, $\frac{dO}{d\tau'} = 0$. Esta condición no es satisfecha por x^μ , así que no es un observable. Considere la nueva coordenada² [79]

$$X_\mu = x_\mu + \frac{1}{P^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} P^\nu J^\lambda. \quad (3.36)$$

Estas satisfacen,

$$[X_\mu, \chi_s] = 0, \quad (3.37)$$

de aquí, son operadores observables. X_μ es un operador vectorial con respecto a las transformaciones de Lorentz en (2+1) generadas por (2.36). Sin embargo, estas no conmutan *on-shell*,

$$[X_\mu, X_\nu] \approx -i(\alpha_+ \Pi_+ + \alpha_- \Pi_-) \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{P^\lambda}{(-P^2)^{3/2}}, \quad (3.38)$$

²En el contexto estudiado aquí, es mejor tratar P_μ en una representación de momento, es decir $x_\mu = i\partial/\partial P^\mu$.

es decir, actuando sobre estados físicos definidos por la ecuación (3.35). De hecho, estas son los análogos de las coordenadas de Foldy-Wouthuysen de las partículas de Dirac [80].

En el límite no-relativista de Jackiw-Nair parte de las coordenadas (3.36) se transforma en [63]

$$\mathcal{X}_i = x_i + \frac{\kappa}{m}\epsilon_{ij}V_j + \frac{\theta}{2}\epsilon_{ij}P_j, \quad (3.39)$$

donde

$$V_i = v_i - \frac{1}{m}P_i \quad (3.40)$$

y $\theta = \kappa/m^2$. El operador en la segunda ecuación en (3.27) es una combinación lineal compleja de V_i , $i = 1, 2$, que comportan como operadores de aniquilación (tiene kernel no-trivial). Las coordenadas (3.39), como aquellas iniciales x_i , forman un vector en 2D, el cual transforma covariantemente con respecto a los boost de Galileo generados por \mathcal{K}_i de (3.26) (\mathcal{X}_i conmuta con \mathcal{K}_j en la misma forma que lo hace x_i).

Las coordenadas x_i no conmutan con el operador $-mV_-$, de la segunda ecuación de (3.27), y sufren un movimiento de Zitterbewegung en la evolución generada por el Hamiltoniano de primer orden (3.28) [63],

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \frac{m}{\kappa}\epsilon_{ij}V_j. \quad (3.41)$$

A diferencia de x_i , las coordenadas \mathcal{X}_i conmutan con el operador $-mV_-$, y así, son observables. Ellas son libres del efecto Zitterbewegung en la evolución de las coordenadas de una partícula libre no-relativista,

$$\dot{\mathcal{X}}_i = \frac{1}{m}P_i. \quad (3.42)$$

Sin embargo, las componentes de las coordenadas (3.39) no conmutan,

$$[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j] = i\theta\epsilon_{ij}, \quad (3.43)$$

y por lo tanto, describen un plano no-conmutativo [63, 78].

Capítulo 4

Ecuaciones para campos de infinitas componentes en 3+1 dimensiones

En el capítulo anterior hemos construido un sistema supersimétrico de anyones basado en una ecuación escalar, espinorial y vectorial; respectivamente, (2.35), (2.65) y (2.71). Estas ecuaciones son análogas a aquellas en (3+1) dimensiones descubiertas hace más de tres décadas; la ecuación de Majorana [5], la nueva ecuación de Dirac 4.64, y la ecuación de Staunton 4.72. Estas ecuaciones se basan en la misma representación del álgebra $so(3, 2)$ descubierta por Majorana. En este capítulo estudiamos estas ecuaciones, teniendo en mente obtener sus generalizaciones supersimétricas posteriormente.

4.1. La ecuación de Majorana

La ecuación de Majorana [5] es una ecuación invariante de Lorentz del tipo de Dirac,

$$(P^\mu \Gamma_\mu - M)\Psi(x) = 0. \quad (4.1)$$

Esta se basa en una representación unitaria y de dimensión infinita del álgebra $so(3, 2)$,

$$\begin{aligned} [S_{\mu\nu}, S_{\lambda\rho}] &= i(\eta_{\mu\lambda}S_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}S_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}S_{\mu\rho}), \\ [S_{\mu\nu}, \Gamma_\lambda] &= i(\eta_{\mu\lambda}\Gamma_\nu - \eta_{\nu\lambda}\Gamma_\mu), \quad [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = -iS_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Aquí x^μ son las coordenadas del espacio-tiempo, $P_\mu = -i\partial/\partial x^\mu$ es el operador de momento (generador de translaciones) y $S_{\mu\nu} = i[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ es la parte invariante de translaciones de las transformaciones de Lorentz,

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Ettore Majorana introdujo esta ecuación [5, 6, 51, 52, 53] en 1932 y resolvió el que fue entonces el problema de la energía negativa que poseía la ecuación de Dirac. Así, por primera vez, Majorana introdujo representaciones unitarias de dimensión infinita del grupo de Lorentz, que fueron redescubiertas más tarde (e.g. [10, 11]), y en la mayor parte de los casos, en completa ignorancia del trabajo de Majorana.

La ecuación de Majorana tiene tres tipos de soluciones características; taquionicas de helicidad arbitraria, sin masa de espín continuo y masivas, con espín arbitrario entero o semi-entero (ver [81, 82]). La solución taquionica es equivalente también a una representación con masa imaginaria. El elemento central de esta teoría, es la construcción de Majorana del álgebra Anti de Sitter $so(3, 2)$, generada por los operadores Γ_μ y $S_{\mu\nu}$, análogamente a las matrices γ_μ y $\gamma_{\mu\nu}$ introducidas por Dirac. Sin embargo, no tienen relaciones de anti-conmutación análogas a $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$. Esta representación es construida en términos de productos cuadráticos de los operadores de creación y aniquilación de un oscilador armónico planar, que podemos comparar con la representación del grupo de Lorentz en $(2+1)D$, (2.40). En esta forma podemos construir 10 operadores independientes, identificados con los 10 generadores de $so(3, 2)$. Además los operadores de creación y aniquilación, pueden ser ordenados en una matriz columna, que conmuta como un espinor ante los generadores de $so(3, 2)$ obtenidos en la forma descrita. Todos estos, lineales y cuadráticos en los operadores de creación y aniquilación, finalmente producen la superálgebra $osp(4|1)$. Es interesante que cuatro décadas antes del descubrimiento de supersimetría encontramos esta estructura supersimétrica subyaciendo en la teoría de Majorana. Las energía positiva de las soluciones también sugiere que algún aspecto de supersimetría debería estar involucrado. Una propiedad que convence aún más sobre la posibilidad de supersimetría. En el caso de soluciones masivas, todas las partículas, de espín $J = 0, 1/2, 1, \dots$, pertenecen al mismo multiplete. Aquí, bosones y fermiones están al mismo píe. Ellos son representados en términos de variables conmutativas (Grassmann par) conteniendo todas las partículas de todos los espines posibles enteros o semi-enteros.

Otro aspecto destacable de esta representación, es que debido a la dimensión infinita de los operadores de creación y aniquilación los generadores de las transformaciones de Lorentz $S_{\mu\nu}$ también son de dimensión infinita, y en general, $osp(4|1)$.

Debido a que la representación de Majorana de $so(3, 2)$ (y de $osp(4|1)$) son construidas en términos de dos osciladores, las soluciones de la ecuación de Majorana son vectores en el espacio de Hilbert de un oscilador planar. En la representación de Fock, estos campos son expandidos en una base tendida por los kets, $\psi(x) = \sum_{n_1, n_2} |\psi^{n_1, n_2}(x)\rangle$, o bien, en la representación de Schrödinger, pueden escritas como funciones dependiendo en los operadores de posición q_i del oscilador $\psi(x) = \psi(x, q)$. Aquí, x son las coordenadas de la partícula en el espacio-tiempo, mientras que las coordenadas q_i , $i = 1, 2$, definen un espacio interno.

Es de notar que, las funciones de estado de fermiones y bosones tienen la misma paridad de Grassmann (pares). Sin embargo ellas pueden ser clasificadas de acuerdo a su paridad en el espacio interno, $\psi(x, q) \rightarrow \psi_\pm(x, \pm q) = \pm\psi_\pm(x, q)$, con ψ_+ (ψ_-) correspondiendo a funciones de onda de bosones (fermiones). La transformación de paridad es efectuada por un operador no-local, el *operador de reflexión*: $\mathcal{R}\psi(x, q) = \psi(x, -q)$, equivalente a una rotación en π del espacio interno. En el espacio de Fock, el operador de reflexión es equivalente a $\mathcal{R} = (-1)^N$, donde N es la suma de los operadores de numero. Sus autovalores serán $+1$ o -1 , y así separa el espacio de Fock en dos subespacios -1 para fermiones, $+1$ para bosones. Las soluciones masivas de la ecuación de Majorana están caracterizadas por un espectro de masa $m_J \propto 1/(J + 1/2)$, donde J es el espín entero o semi-entero de la partícula correspondiente.

Notamos entonces que la teoría de Majorana involucra conceptos que han sido fundamentales en el desarrollo de la física contemporánea de altas energías. Por ejemplo, las soluciones taquionicas son equivalentes a partículas de masa imaginaria. Esto puede ser tomado co-

mo un indicio temprano para el fenómeno de rompimiento espontáneo de simetría, dado en teoría de campos. Ahí la extensión analítica de los términos de masa, con parámetros de masa imaginario, produce un potencial el cual es susceptible de tener un estado vacío donde las simetrías de la teoría se rompen. También notamos la presencia de una estructura supersimétrica en los grados de libertad internos, $Osp(4|1)$ (su subálgebra de Lorentz corresponde a los grados de libertad de espín). Además bosones y fermiones transforman bajo la misma representación del grupo de Lorentz, y así, estos son tratados de forma equivalente. Estos aspectos sugieren la equivalencia de bosones y fermiones, y en particular supersimetría.

El desarrollo del concepto de campos de infinitas componentes introducidos por Majorana [83, 84, 85, 81] llevo finalmente a la construcción de de los modelos de resonancia dual y más tarde a la teoría de supecuerdas [86, 87, 88, 89, 90, 91]. En esta dirección, es interesante que en el caso masivo, la ecuación de Majorana describe un infinito número de partículas con masas y espín relacionados a través de trayectorias tipo Regge. Además el espacio interno de los campos de Majorana es de dimensión dos (una superficie de Riemann). Estos aspectos, sugieren una relación a teoria de cuerdas.¹

La estructura fundamental en la teoría de Majorana, relacionada a los grados de libertad internos es el álgebra $osp(4)$. En el capítulo siguiente, nos dirigiremos al problema encontrar generalizaciones supersimétricas de la teoría de Majorana. Para estos efectos, será de importancia extender primero $osp(4)$ a $osp(4|1)$.

4.2. $osp(4|1)$

La representación de Majorana del grupo de Lorentz, es una en la cual los operadores de Casimir,

$$C_1 = S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad C_2 = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} S_{\mu\nu} S_{\lambda\rho}, \quad (4.3)$$

toman los valores fijos,

$$C_1 = -\frac{3}{2}, \quad C_2 = 0. \quad (4.4)$$

Esta representación puede ser realizada en términos de dos copias del álgebra de Heisenberg, generalizando el procedimiento exhibido en la sección 2.2.1. Como veremos la representación de Majorana está incluida dentro de una estructura supersimétrica, $osp(4|1)$, completando la analogía con el sistema anterior en (2+1) dimensiones.

En vez de (2.37) ahora debemos escribir,

$$[a_i^-, a_j^+] = 1, \quad \text{donde} \quad a_i^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_i \mp i\eta_i), \quad [q_i, \eta_j] = i\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.5)$$

Donde q_i y η_i son las coordenadas y momentos de un oscilador planar, y en particular, elegimos q_i diagonal y $\eta_i = -i\partial/\partial q_i$. Aquí, q_i y η_i son adimensionales. Consideremos ahora el operador

$$(L_a) = (q_1, q_2, \eta_1, \eta_2), \quad a = 1, 2, 3, 4, \quad (4.6)$$

¹De hecho hay una relación ver la referencia [92] para más detalle.

el que satisface

$$[L_a, L_b] = iC_{ab}, \quad C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Ahora C_{ab} juega el papel de una métrica espinorial. Definiendo $C^{ab} = C_{ab}$, $C_{ac}C^{bc} = \delta_a^b$, subimos y bajamos índices espinoriales como $A^a = A_b C^{ba}$ and $A_a = C_{ab} A^b$.

Podemos construir 10 operadores independientes $L_a L_b$, que pueden ser combinados convenientemente como,

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{2} L^a (\gamma_{\mu\nu})_a{}^b L_b, \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{4} L^a (\gamma_\mu)_a{}^b L_b, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

(la forma explicita de estos generadores puede ser encontrada en el apéndice B.) Aquí las matrices $(\gamma^\mu)_a{}^b$ son las matrices de Dirac en la representación de Majorana,

$$\begin{aligned} (\gamma^0)_a{}^b &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ -\sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, & (\gamma^1)_a{}^b &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\gamma^2)_a{}^b &= \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, & (\gamma^3)_a{}^b &= \begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y $\gamma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ son matrices imaginarias puras. Las matrices de Dirac satisfacen, junto con la métrica de del espacio-tiempo $diag(\eta^{\mu\nu}) = (-+++)$, la relación $\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + 2i\gamma^{\mu\nu}$.

Obtenemos finalmente la superálgebra $osp(4|1)$,

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\lambda} S_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} S_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} S_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} S_{\mu\rho}), \quad (4.9)$$

$$[S_{\mu\nu}, \Gamma_\lambda] = i(\eta_{\mu\lambda} \Gamma_\nu - \eta_{\nu\lambda} \Gamma_\mu), \quad [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = -iS_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

$$[S_{\mu\nu}, L_a] = -(\gamma_{\mu\nu})_a{}^b L_b, \quad [\Gamma_\mu, L_a] = \frac{i}{2} (\gamma_\mu)_a{}^b L_b, \quad (4.11)$$

$$\{L_a, L_b\} = -2(iS_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} - \Gamma_\mu \gamma^\mu)_{ab}, \quad (4.12)$$

donde $(\gamma^\mu)_{ab} = C_{bc}(\gamma^\mu)_a{}^c$ y $(\gamma^{\mu\nu})_{ab} = C_{bc}(\gamma^{\mu\nu})_a{}^c$ son matrices simétricas.

Los operadores de creación y aniquilación son obtenidos desde las combinaciones lineales $a_i^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_i \mp i\eta_i)$, $[a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

En la representación de Fock, los generadores de $osp(4|1)$ actuaran irreduciblemente sobre el producto tensorial de los espacios de Fock de cada oscilador,

$$\mathcal{O} = \{|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.13)$$

sobre el cual los operadores de creación y aniquilación producen,

$$a_1^+ |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2\rangle, \quad a_2^+ |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1\rangle, \quad (4.14)$$

$$a_1^- |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle, \quad a_2^- |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1\rangle. \quad (4.15)$$

Aquí,

$$N_1 |n_1, n_2\rangle = n_1 |n_1, n_2\rangle, \quad N_2 |n_1, n_2\rangle = n_2 |n_1, n_2\rangle \quad (4.16)$$

son los operadores de número $N_1 = a_1^+ a_1^-$ y $N_2 = a_2^+ a_2^-$, respectivamente.

Sin embargo el álgebra $so(3, 2)$, (4.9)-(4.10), actúa reduciblemente sobre todo el espacio de Fock \mathcal{O} . Las acción irreducible ocurre en los subespacios,

$$\mathcal{O}_+ = |++\rangle \oplus |--\rangle \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_- = |+-\rangle \oplus |-+\rangle, \quad (4.17)$$

donde definimos,

$$|\pm\pm\rangle = \{|n_1, n_2\rangle_{\pm\pm} = |n_1\rangle_{\pm} |n_2\rangle_{\pm}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.18)$$

$$|\pm\mp\rangle = \{|n_1, n_2\rangle_{\pm\mp} = |n_1\rangle_{\pm} |n_2\rangle_{\mp}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.19)$$

$$|n\rangle_+ = |2n\rangle, \quad |n\rangle_- = |2n + 1\rangle. \quad (4.20)$$

Los operadores de Casimir (4.3) toman los valores (4.4) en ambos subespacios \mathcal{O}_+ y \mathcal{O}_- . Además, el cuadrado de Γ_μ es invariante de Lorentz, teniendo autovalor

$$\Gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1}{2}. \quad (4.21)$$

Se satisfacen también las identidades,

$$\Gamma^\mu S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \Gamma^\mu = -\frac{3i}{2} \Gamma_\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} S_{\nu\lambda} \Gamma_\rho = 0. \quad (4.22)$$

Los operadores de reflexión de cada álgebra de Heisenberg,

$$R_i = (-1)^{N_i}, \quad R_i |n_1, n_2\rangle = (-1)^{n_i} |n_1, n_2\rangle, \quad i = 1, 2,$$

donde N_i son los operadores de número definidos en (4.16), pueden ser empleados para construir el *operador de reflexión total*,

$$\mathcal{R} = R_1 R_2 = (-1)^{N_1 + N_2}. \quad (4.23)$$

En acuerdo con (4.17)-(4.20) y (4.23),

$$\mathcal{R} \mathcal{O}_\pm = \pm \mathcal{O}_\pm, \quad \mathcal{R}^2 = 1. \quad (4.24)$$

\mathcal{R} juega el papel de operador de graduación la superálgebra $osp(4|1)$. La relación $\{\mathcal{R}, a_i^\pm\} = 0$ implica,

$$[\mathcal{R}, S_{\mu\nu}] = 0, \quad [\mathcal{R}, \Gamma_\mu] = 0, \quad \{\mathcal{R}, L_a\} = 0. \quad (4.25)$$

Teniendo en cuenta la identidad $(-1)^{2N_2} = 1$ y la forma explícita de los generadores de AdS (ver apéndice B), el operador de reflexión puede ser identificado con dos transformaciones específicas,

$$\mathcal{R} = -\exp(i2\pi\Gamma_0) = \exp(i2\pi S^{12}), \quad (4.26)$$

es decir, una rotación de AdS en 2π sobre el plano de las dos coordenadas tipo tiempo, o una rotación en ángulo 2π en el eje z , respectivamente. Debido a que una transformación unitaria, $U \in SO(3, 2)$, siempre conmuta con \mathcal{R} , tenemos más generalmente que $\mathcal{R} = -\exp(i2\pi\tilde{\Gamma}_0) = \exp(i2\pi\tilde{S}^{12})$, donde $\tilde{\Gamma}_0 = U\Gamma_0 U^\dagger$ y $\tilde{S}^{12} = US^{12}U^\dagger$. En cualquier caso, el operador de reflexión

es el operador de paridad, una rotación en ángulo π , en el plano tendido por las coordenadas internas q_i , de aquí este es un operador no-local. En una representación de Schrödinger,

$$\mathcal{R}\psi(\vec{q}) = \psi(-\vec{q}). \quad (4.27)$$

Las autofunciones de \mathcal{R} son por lo tanto pares o impares,

$$\mathcal{R}\psi_{\pm}(\vec{q}) = \pm\psi_{\pm}(\vec{q}), \quad \psi_{\pm}(\vec{q}) = \frac{1}{2}(\psi(\vec{q}) \pm \psi(-\vec{q})). \quad (4.28)$$

Recordamos que en la sección previa, la deformación del álgebra del oscilador armónico permitía el espín arbitrario del álgebra de Lorentz en (2+1) dimensiones. Es natural preguntar si sería posible que tal deformación producirá un espín arbitrario del álgebra de Lorentz en el presente caso de (3+1) dimensiones. La respuesta es negativa. A diferencia del sistema en (2+1) dimensiones, ahora, *el álgebra de Lorentz se deforma*, lo que no es aceptable en una teoría covariante. Es de valor mencionar sin embargo, que re-etiquetando los generadores del álgebra AdS construida aquí, es posible hacer que las relaciones de conmutación deformadas sean aquellas que involucran solamente al operador Γ_{μ} . Así la subálgebra de Lorentz no resulta alterada, a pesar de la deformación del álgebra de los osciladores. Este tipo de representaciones a sido útil para la construcción de una teoría de partículas sin masa de helicidad arbitraria [50] (con valores enteros o semi-enteros).

4.2.1. Soluciones Masivas

En el sistema de referencia estandar $P^{\mu} = (m, 0, 0, 0)$ y el grupo pequeño es el grupo de rotaciones, el cual es generado por $S_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S_{jk}$. La ecuación de Majorana es reducida en este sistema de referencia a

$$P^0\Gamma_0 - M = 0. \quad (4.29)$$

Podemos diagonalizar simultáneamente el operador de Casimir del grupo de rotaciones y uno de sus generadores. También podemos diagonalizar el operador Γ_0 . Así obtenemos

$$S_i S_i \psi_{J,J_3}^{(0)} = J(J+1)\psi_{J,J_3}^{(0)}, \quad S_3 \psi_{J,J_3}^{(0)} = J_3 \psi_{J,J_3}^{(0)}, \quad \Gamma_0 \psi_{J,J_3}^{(0)} = (J+1/2)\psi_{J,J_3}^{(0)}, \quad (4.30)$$

$$J = \frac{N}{2}, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.31)$$

donde $\psi_{J,J_3}^{(0)}$ son las correspondientes autofunciones (soluciones en sistema de reposo).

Realmente, las $\psi_{J,J_3}^{(0)}$ son autofunciones de los operadores

$$\hat{J} = \frac{N_1 + N_2}{2} \quad \text{y} \quad S_3 = \frac{N_1 - N_2}{2}, \quad (4.32)$$

donde N_1 y N_2 son los operadores de número de cada oscilador. De aquí es directo que sus autovalores J de \hat{J} y J_3 de S_3 , serán números enteros o semienteros. Podemos reescribir entonces los operadores en (4.30) como,

$$S_i S_i = \hat{J}(\hat{J} + 1), \quad \Gamma_0 = \hat{J} + \frac{1}{2}, \quad (4.33)$$

mientras que los autovalores de S_3 corresponden a la proyección del espín en el eje z ,

$$S_3\psi_{J,J_3}^{(0)} = J_3\psi_{J,J_3}^{(0)}, \quad J_3 = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

Así, la solución de espín J y masa m_J es,

$$\psi_J^{(0)} = \sum_{J_3} \psi_{J,J_3}^{(0)}, \quad J_3 = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

De (4.29) podemos obtener un espectro de masa dependiendo del espín de la partícula. Denotando $P^\mu = (m_J, 0, 0, 0)$ y teniendo en cuenta los autovalores de Γ_0 en (4.30) obtenemos,

$$m_J = \frac{M}{(J + \frac{1}{2})}, \quad J = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (4.34)$$

Así la solución de la ecuación de Majorana contiene infinitas representaciones del grupo de Poincaré, las cuales tienen espín J y masa m_J . Dado que Γ_0 es definido positivo, para valores $M > 0$, la energía de la partícula solo puede ser positiva, es decir, los autovalores de P^0 .

Es ilustrativo dar las soluciones en sistema de reposo explícitamente,

$$\Psi_{J_+}^{(0)} = \left(\sum_{n=0}^{J_+} \psi_{++}^n |J_+ - n, n\rangle_{++} + \sum_{n=1}^{J_+} \psi_{--}^n |J_+ - n, n-1\rangle_{--} \right) \exp(-itm_{J_+}), \quad (4.35)$$

$$\Psi_{J_-}^{(0)} = \sum_{n=0}^{J_- - \frac{1}{2}} \left(\psi_{+-}^n |J_- - \frac{1}{2} - n, n\rangle_{+-} + \psi_{-+}^n |J_- - \frac{1}{2} - n, n\rangle_{-+} \right) \exp(-itm_{J_-}), \quad (4.36)$$

$$J_+ = 0, 1, 2, \dots \quad J_- = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (4.37)$$

donde J_\pm indica si el espín del campo es entero o semi-entero, $\psi_{\pm\pm}^n$ y $\psi_{\pm\mp}^n$ son constantes arbitrarias y $t = x^0$. Observamos que cada a componente en estas expansiones corresponde un estado de polarización en particular, de acuerdo al autovalor de S_3 , $J_3 = -J, -J+1, \dots, J-1, J$. Las soluciones en un sistema de referencia arbitrario pueden ser obtenidas por una transformación de Lorentz de las soluciones (4.35) and (4.36), de donde estas tendrán la forma genérica,

$$\Psi_{J_+}(x) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (\psi_{++}^{n_1 n_2}(x) |n_1, n_2\rangle_{++} + \psi_{--}^{n_1 n_2}(x) |n_1, n_2\rangle_{--}), \quad \text{en } \mathcal{O}_+, \quad (4.38)$$

$$\Psi_{J_-}(x) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (\psi_{+-}^{n_1 n_2}(x) |n_1, n_2\rangle_{+-} + \psi_{-+}^{n_1 n_2}(x) |n_1, n_2\rangle_{-+}), \quad \text{en } \mathcal{O}_-, \quad (4.39)$$

Aquí solo $2J_\pm + 1$ componentes son independientes en cada solución.

La solución general de la ecuación de Majorana es una superposición infinita de aquellas en (4.38) y (4.38),

$$\Psi(x) = \Psi_+(x) + \Psi_-(x) \quad (4.40)$$

$$\Psi_\pm(x) = \sum_{J_\pm} \Psi_{J_\pm}(x), \quad J_+ = 0, 1, 2, \dots, \quad J_- = 1/2, 3/2, 5/2, \dots .$$

Teniendo en cuenta las relaciones (4.24) observamos que,

$$\mathcal{R}\Psi_\pm(x) = \pm\Psi_\pm(x). \quad (4.41)$$

Entonces, podemos introducir los operadores de proyección,

$$|\Psi_{\pm}(x)\rangle \equiv \Pi_{\pm}|\Psi(x)\rangle, \quad (4.42)$$

$$\Pi_+ = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{R}), \quad \Pi_- = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{R}), \quad (4.43)$$

$$\Pi_+ + \Pi_- = 1, \quad (\Pi_{\pm})^2 = \Pi_{\pm}, \quad \Pi_+\Pi_- = 0.$$

Es importante notar que,

$$[\Pi_{\pm}, S_{\mu\nu}] = [\Pi_{\pm}, \Gamma_{\mu}] = 0, \quad \Pi_{\pm}L_a = L_a\Pi_{\mp}. \quad (4.44)$$

Observamos que las soluciones de Majorana son consistentes con la clasificación usual de las representaciones del grupo de Poincaré, es decir, satisfacen las ecuaciones de Klein-Gordon y la condición debida al vector de Pauli-Lubanski, $W^{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}S_{\nu\lambda}P_{\rho}$, cuyo cuadrado es

$$W^{\mu}W_{\mu} = -\frac{1}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}P^2 + S_{\mu\nu}S^{\mu\lambda}P^{\nu}P_{\lambda} = \frac{1}{4}P^2 + (P\Gamma)^2. \quad (4.45)$$

En la última ecuación hemos hecho uso de las identidades (4.22). Así, restringiéndonos a las soluciones de la ecuación de Majorana (on-shell), estos satisfacen

$$(P^2 + m_J^2)\Psi_J(x) = 0, \quad W^{\mu}W_{\mu}\Psi_J(x) = m_J^2J(J+1)\Psi_J(x). \quad (4.46)$$

Hemos observado que solo los generadores del álgebra AdS han sido importante en esta construcción. Estos operadores dejan invariante los subespacios \mathcal{O}_+ y \mathcal{O}_- , sin embargo podemos observar algo importante. La suma directa de los subespacios, $\mathcal{O}_+ \oplus \mathcal{O}_-$, tiende una representación irreducible de la superálgebra $osp(4|1)$, donde la supercarga L_a , intercambia ambos subespacios. Así, parece posible construir una (super)simetría basada en este operador, mapeando soluciones de espín entero a las de espín semi-entero y vice versa. Observaremos que esto es de hecho posible en el capítulo 5.

4.2.2. Coordenadas de cono de luz en la ecuación de Majorana

Estudiando la ecuación de Majorana en la representación de Schrödinger de los operadores de AdS, una nueva perspectiva puede ser obtenida. El álgebra AdS actuará sobre los grados de libertad internos q_i , de los campos de Majorana $\psi(x, q)$. Así, las soluciones de la ecuación de Majorana están definidas en un espacio-tiempo extendido (x_{μ}, q_i) . Las coordenadas q_i son las que proporcionan los grados de libertad de espín, en forma análoga a como el mecanismo de Kaluza-Klein proporciona grados de Libertad de Gauge. De manera sorprendente, cuando resolvemos la ecuación de Majorana en coordenadas de cono de Luz, la ecuación de Majorana se vuelve equivalente a la ecuación de Schrödinger estática de un oscilador en el espacio tendido por las coordenadas q_i . Procedemos ahora a resolver esta ecuación en dichas coordenadas.

Definamos las coordenadas de cono de Luz. Para un vector arbitrario V^{μ} , $\mu = 0, 1, 2, 3$, estas son: $V_{\pm} = \frac{V^0 \pm V^1}{\sqrt{2}}$, mientras que V^1, V^2 se mantienen. Usamos esta notación, y además

hacemos explícita la dependencia de los campos en las coordenadas q_i . Reescribimos entonces, (4.1) la siguiente forma,

$$(-P_+\Gamma_- - P_-\Gamma_+ + P_2\Gamma_2 + P_3\Gamma_3 - M)\Psi(x, q) = 0. \quad (4.47)$$

en particular (ver B.2)

$$\Gamma_+ = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\eta_1^2 + \eta_2^2), \quad \Gamma_- = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(q_1^2 + q_2^2).$$

Consideremos una solución de la forma,

$$\Psi(x, q) = \exp(ix^\mu p_\mu) f(q, p).$$

Así, en (4.47) podemos reemplazar el operador P^μ por su autovalor p^μ . Aquí, $f(q, p)$ es una función de p_μ y de las coordenadas q_i . Entonces,

$$\begin{aligned} (-P_+\Gamma_- - P_-\Gamma_+ + P_2\Gamma_2 + P_3\Gamma_3)\Psi(x, q) = & \quad (4.48) \\ \frac{p_-}{\sqrt{2}} \left(\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \frac{p_2 q_1 - p_3 q_2}{\sqrt{2} p_-} + \frac{p_3 q_1 - p_2 q_2}{\sqrt{2} p_-} \right) \Psi(x, q), \end{aligned}$$

donde

$$\omega^2 = \frac{1}{p_-} \left(p_+ - \frac{p_2^2 + p_3^2}{2p_-} \right) = \frac{-p^2}{2p_-^2}.$$

El termino dentro del parentesis en las segunda linea de (4.48), es el Hamiltoniano de una partícula sobre el plano tendido por las coordenadas q_i . El coeficiente $p^\mu p_\mu$ y p_- son siempre diferente de cero, ya que las partículas consideradas son masivas y por lo tanto se propagan dentro de su cono de luz. La partícula es también afectada por un potencial armónico, y hay un término de interacción que puede ser reescrito como el acoplamiento minimal a un campo de gauge sobre el plano,

$$(-P_+\Gamma_- - P_-\Gamma_+ + P_2\Gamma_2 + P_3\Gamma_3)\Psi(x, q) = \frac{p_-}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\vec{\eta} - \vec{A})^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} \right) \Psi(x, q), \quad (4.49)$$

$$A_1 = \frac{p_2 q_1 - p_3 q_2}{\sqrt{2} p_-}, \quad A_2 = -\frac{p_3 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{2} p_-}. \quad (4.50)$$

Sin embargo, el campo A_i puede ser eliminado por una transformación de gauge,

$$A_i = \frac{\partial \phi}{\partial q_i}, \quad \phi = \frac{p_2(q_1^2 - q_2^2) - 2p_3 q_1 q_2}{2\sqrt{2} p_-}. \quad (4.51)$$

Así que podemos absorber esta interacción en un factor de fase. Finalmente, la ecuación de Majorana es rescrita como,

$$\begin{aligned} (P\Gamma - M)\Psi(x, q) &= \frac{p_-}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\vec{\eta} - \vec{A})^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \frac{\sqrt{2}M}{p_-} \right) \Psi(x, q) \\ &= \exp(i\phi) \frac{p_-}{\sqrt{2}} \left(\frac{\vec{\eta}^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \frac{\sqrt{2}M}{p_-} \right) \exp(-i\phi) \Psi(x, q). \end{aligned} \quad (4.52)$$

El factor $\exp(i\phi)p_-$ es finito diferente de cero, como consecuencia de que la partícula es masiva, de hecho, esto asegura que $p_- > 0$. Como resultado de igualar a cero la ecuación (4.52), resolver la ecuación de Majorana es equivalente a resolver la ecuación de Schrödinger para un oscilador planar,

$$\left(\frac{\vec{\eta}^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \mathcal{E} \right) \Psi'(x, q) = 0. \quad (4.53)$$

Donde, $\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2}M}{p_-}$ y $\Psi'(x, q) = \exp(-i\phi)\Psi(x, q)$. Recuerde que $\Psi(x, q) = \exp(ix^\mu p_\mu)f(q, p)$; (4.53), por lo tanto esta es equivalente a,

$$\left(\frac{\vec{\eta}^2}{2} + \omega^2 \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \mathcal{E} \right) \tilde{f}(q, p) = 0, \quad (4.54)$$

donde $\tilde{f}(q, p) = \exp(-i\phi)f(q, p)$, es la función de estado del oscilador. La solución no-normalizada, depende de dos números enteros,

$$\tilde{f}_{n_1, n_2}(q, p) = \exp\left(-\frac{\omega}{2}(q_1^2 + q_2^2)\right) H_{n_1}(\omega q_1) H_{n_2}(\omega q_2), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Aquí $H_n(r)$ es el polinomio de Hermite de orden n . A esta solución, corresponde un oscilador de energía,

$$\mathcal{E} = \omega(n_1 + n_2 + 1), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Pero, debemos recordar que $\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2}M}{p_-}$ y $\omega^2 = -\frac{p^2}{2p_-}$. Así, la cuantización de la energía del oscilador, es en el espectro de Majorana, la cuantización de la masa,

$$\sqrt{-p^2} = m_{m, n}, \quad m_{m, n} = \frac{M}{(n_1 + n_2 + 1)/2}.$$

Esta restricción para p^2 , impone $\omega = \frac{m_{m, n}}{\sqrt{2p_-}}$. A esta frecuencia del oscilador denotamos ω_{n_1, n_2} . Para más claridad, es conveniente escribir la solución del sistema planar como

$$\tilde{f}_{n_1, n_2}(q, p) = \exp\left(-\frac{\omega_{n_1, n_2}}{2}(q_1^2 + q_2^2)\right) H_{n_1}(\omega_{n_1, n_2} q_1) H_{n_2}(\omega_{n_1, n_2} q_2).$$

Volviendo a las solución de la ecuación de Majorana: $\Psi(x, q) = \exp(ix^\mu p_\mu)f(q, p) = \exp(ix^\mu p_\mu) \exp(i\phi)\tilde{f}(q, p)$. Que, finalmente, será una superposición de aquellas dependiendo sobre el par (n_1, n_2) ,

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}(x, q) &= \exp(ix^\mu p_\mu) \exp(i\phi) \tilde{f}_{n_1, n_2}(q, p), \quad (4.55) \\ &= \exp(ix^\mu p_\mu) \exp(i\phi) \exp\left(-\frac{\omega_{n_1, n_2}}{2}(q_1^2 + q_2^2)\right) H_{n_1}(\omega_{n_1, n_2} q_1) H_{n_2}(\omega_{n_1, n_2} q_2), \\ &= \exp\left(i \frac{p_2(q_1^2 - q_2^2) - 2p_3 q_1 q_2 + m_{n_1, n_2}(q_1^2 + q_2^2)}{2\sqrt{2}p_-}\right) \\ &\quad H_{n_1}\left(\frac{m_{n_1, n_2}}{\sqrt{2}p_-} q_1\right) H_{n_2}\left(\frac{m_{n_1, n_2}}{\sqrt{2}p_-} q_2\right) \exp(ix^\mu p_\mu) \delta(p^0 - \sqrt{p^i p^i + m^2}), \end{aligned}$$

con ϕ definido en (4.51). Es decir, la solución completa de la ecuación de Majorana es,

$$\Psi(x, q) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \Psi_{n_1, n_2}(x, q), \quad (4.56)$$

con cada componente satisfaciendo,

$$(P^2 + m_{n,m}^2)\Psi_{n_1, n_2}(x, q) = 0, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

Podemos verificar que el cuadrado del vector de Pauli-Lubanski, $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}S_{\nu\lambda}P_\rho$,

$$W^\mu W_\mu = -\frac{1}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}P^2 + S_{\mu\nu}S^{\mu\lambda}P^\nu P_\lambda = \frac{1}{4}P^2 + (P\Gamma)^2, \quad (4.58)$$

toma sobre estos estados los valores (on-shell)

$$W^\mu W_\mu \Psi_{n_1, n_2}(x, q) = m_{n_1, n_2}^2 J(J+1)\Psi_{n_1, n_2}(x, q), \quad J = \frac{n_1 + n_2}{2}. \quad (4.59)$$

Aquí hemos usado las identidades (4.21,4.22). La solución, (4.56) puede ser convenientemente rescrita,

$$\Psi(x, q) = \sum_J \Psi_J(x, q), \quad J = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (4.60)$$

$$\Psi_J(x, q) = \sum_{n_1, n_2} \Psi_{n_1, n_2}(x, q), \quad \text{tal que } J = \frac{n_1 + n_2}{2}. \quad (4.61)$$

Es decir, la ecuación de Majorana es una superposición de un infinito numero de campos, llevando una representación del grupo de Poincaré caracterizadas por su masa y espín,

$$(P^2 + m_J^2)\Psi_J(x, q), \quad W^\mu W_\mu \Psi_J(x, q) = m_J^2 J(J+1)\Psi_J(x, q), \quad m_J = \frac{M}{(J+1/2)}.$$

Debido a que $J = (n_1 + n_2)/2$, hay $2J + 1$ posibles combinaciones de n_1 y n_2 , para cada representación de Poincaré. Esto corresponde a los estados de Polarización; la proyección del espín en el eje z .

El operador de reflexión (4.26) puede expresarse en terminos del operador de numero de los osciladores;

$$\mathcal{R} = (-1)^{(N_1+N_2)}.$$

O en forma equivalente,

$$\mathcal{R} = (-1)^{2J}.$$

Este tiene autovalores ± 1 , es decir, $\mathcal{R}\Psi_{n_1, n_2}(x, q) = (-1)^{(n_1+n_2)}\Psi_{n_1, n_2}(x, q)$. Los auto-espacios del operador de reflexión tienen espín entero o semi-entero,

$$\Psi(x, q) = \Psi_+(x, q) + \Psi_-(x, q), \quad \mathcal{R}\Psi_\pm(x, q) = \pm\Psi_\pm(x, q), \quad (4.62)$$

$$\Psi_\pm(x, q) = \sum_{J_\pm} \Psi_{J_\pm}(x, q), \quad J_+ = 0, 1, 2, \dots, \quad J_- = 1/2, 3/2, 5/2, \dots \quad (4.63)$$

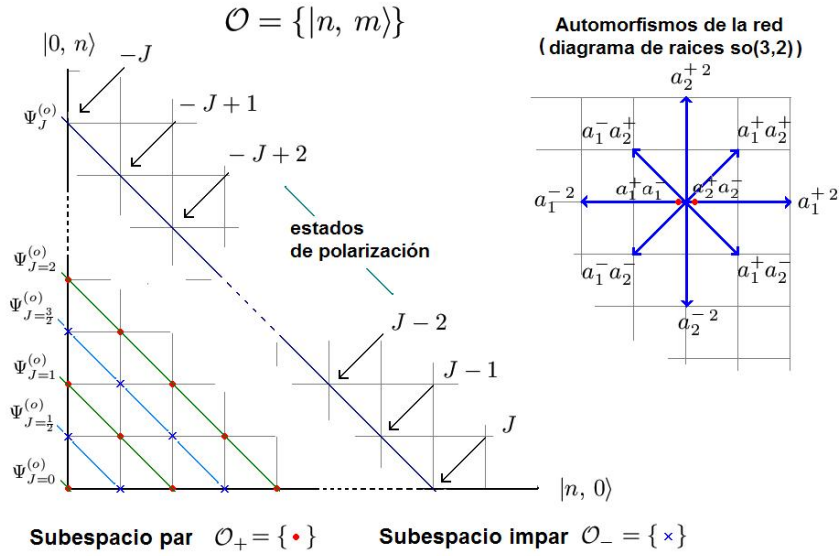


Figura 4.1:

Las principales propiedades de la teoría de Majorana pueden ser resumidos en el siguiente cuadro,

Aquí, cada punto de la red representa un ket $|nm\rangle$ en el espacio de Fock. Los generadores del álgebra AdS, $so(3, 2)$, actúan sobre la red como automorfismos de esta, mapeando puntos próximos, pero con $\delta(n + m) = \pm 2$, y así, dejan invariantes los subespacios $n + m = \text{par}$ y $n + m = \text{impar}$; \mathcal{O}_+ y \mathcal{O}_- respectivamente. La acción de los generadores de AdS sobre la red, es equivalente a su diagrama de raíces. Hay dos operadores que dejan invariante cada punto, $\Gamma^0 = -\frac{1}{2}(N_1 + N_2 + 1)$ y $S^{12} = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)$. Estos pertenecen a la subálgebra de Cartan de $so(3, 2)$.

Las soluciones de la ecuación son expandidas sobre el espacio de Fock, y así a cada punto en el diagrama 4.1 es asignado una función escalar etiquetada con los número (n, m) . Los subespacios de la red $(n + m) = \text{cte}$, corresponden, en el sistema de reposo, a los estados de polarización de una partícula de espín $J = (n + m)/2$ (ver (4.60)). El generador de rotaciones S^{12} deja invariantes estos subespacios, cambiando los estados de polarización.

4.3. La nueva ecuación de Dirac

En 1971 Dirac propone una nueva ecuación [7]. Esta describe una partícula escalar sin masa. El espín y la masa de esta partícula son fijadas a través de las ecuaciones de consistencia de la nueva ecuación de Dirac, las cuales son, la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Majorana. En nuestras convenciones, la nueva ecuación de Dirac es,²

$$D_a |\Psi(x)\rangle = 0, \quad \text{where} \quad D_a = (-iP^\mu \gamma_\mu + m)_a{}^b L_b. \quad (4.64)$$

²La correspondencia con las convenciones del paper original de Dirac [7] son, $q_a = L_a$, $\alpha^0 = (\gamma^0)^{ab}$, $\alpha^1 = (\gamma^2)^{ab}$, $\alpha^2 = (\gamma^3)^{ab}$ and $\alpha^3 = (\gamma^1)^{ab}$.

La similitud con la ecuación de Dirac usual es engañosa. Aquí $|\Psi(x)\rangle$ es un campo de infinitas componentes (tal como los de Majorana en la sección previa) y no tiene un índice espinorial a . La nueva ecuación de Dirac no es invariante de Lorentz. Sin embargo transforma, covariantemente,

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, D_a] = -(\gamma_{\mu\nu})_a{}^b D_b,$$

como un espinor. Por lo tanto, si esta ecuación es válida en algún sistema de referencia, lo será también el cualquier otro. Para obtener ecuaciones de consistencia, podemos contraer el operador D_a en (4.64) con $L^b(\lambda)_b{}^a$, donde $(\lambda)_a{}^b$ es una matriz arbitraria 4×4 . Así, obtenemos quince ecuaciones de consistencia. (Para $\lambda = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ obtenemos una identidad $0 = 0$.) Estas ecuaciones pueden ser organizadas como,

$$(P^\mu \Gamma_\mu - \frac{1}{2}m)|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (4.65)$$

$$(m\Gamma_\mu + \frac{1}{2}P_\mu - iS_{\mu\nu}P^\nu)|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (4.66)$$

$$(\Gamma_\mu P_\nu - \Gamma_\nu P_\mu + imS_{\mu\nu})|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (4.67)$$

$$W^\mu|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (4.68)$$

donde W^μ es el vector de Pauli-Lubanski. La ecuación de Klein-Gordon aparece cuando requerimos que el conmutador,

$$[D_a, D_b]|\Psi(x)\rangle = iC_{ab}(P^2 + m^2)|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (4.69)$$

sea cero, on-shell. Observamos que la ecuación de Majorana es una de las ecuaciones de consistencia, (4.65), con el parametro de masa $M = m/2$. La ecuación de Klein-Gordon (4.69) extrae desde las soluciones de la ecuación de Majorana (4.65), aquella de espín cero. Vemos esto empleando la formula de masa (4.34), para la cual la masa ya esta fija (m) y se debe satisfacer que $m = M/(J + 1/2) = (m/2)/(J + 1/2)$, por lo que $J = 0$. Por lo tanto, la nueva ecuación de Dirac describe una partícula masiva de energía positiva y espín cero. La solución de la ecuación de Dirac es nada mas que aquella $|\Psi_{J_+=0}(x)\rangle$, de la ecuación de Majorana.

Es ilustrativo escribir la solución de la nueva ecuación de Dirac empleando una representación de coordenadas del espacio interno. En este caso, los generadores de AdS son representados como operadores diferenciales (B.2) actuando sobre una función definida sobre el “plano interno” (q_1, q_2) . (Formalmente $\psi_+(x, q) = \langle q|\Psi_{J_+=0}(x)\rangle$.) Esta es,

$$\psi_+(x, q) = A \exp \left\{ \frac{-m(q_1^2 + q_2^2) - ip^2(q_1^2 - q_2^2) + i2p^3 q_1 q_2}{2(p^0 - p^1)} \right\} \exp(ix^\mu p_\mu), \quad (4.70)$$

donde A es una constante arbitraria. Esta es una función par bajo reflexiones de las coordenadas internas q_i ,

$$\mathcal{R}\psi_+(x, q) = \psi_+(x, q).$$

En el sistema de reposo, esta se reduce al estado base de un oscilador planar,

$$\psi_+^{(0)}(t, q) = A \exp \left\{ \frac{-(q_1^2 + q_2^2)}{2} \right\} \exp(-itm) = A \langle q|00\rangle \exp(-itm). \quad (4.71)$$

La ecuación de Dirac (4.64) describe entonces una partícula libre de espín cero y masa m .

4.4. La ecuación de Staunton

En 1974 Staunton [9] observó que la ecuación the Majorana y la ecuación de Klein-Gordon pueden ser obtenidas desde (4.66), sin necesidad de usar la nueva ecuación Dirac (4.64). Staunton, mientras estudiaba la posibilidad obtener interacciones, modifico esta ecuación introduciendo un coeficiente arbitrario κ en frente de P_μ . El observo, que esta ecuación es consistente con una representación del grupo de Poincaré solo para dos valores, $\kappa = \frac{1}{2}$ y $\kappa = 1$. Esto es,

$$D_\mu^{(\kappa)}|\Psi(x)\rangle = 0, \quad D_\mu^{(\kappa)} = m\Gamma_\mu + \kappa P_\mu - iS_{\mu\nu}P^\nu. \quad (4.72)$$

Como ecuaciones de consistencia, (4.72) produce la ecuación de Klein-Gordon y Majorana,

$$(P^2 + m^2)|\Psi(x)\rangle = 0, \quad \text{and} \quad (P^\mu\Gamma_\mu - m\kappa)|\Psi(x)\rangle = 0. \quad (4.73)$$

La ecuación de Klein-Gordon aparece cuando requerimos que el conmutador,

$$[D_\mu, D_\nu]|\Psi(x)\rangle = [-i(P^2 + m^2)S_{\mu\nu} - P_\mu D_\nu + P_\nu D_\mu]|\Psi(x)\rangle,$$

produzca cero. Entonces, contrayendo con $S^{\mu\nu}$ por la izquierda y considerando (4.4), encontramos que se debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon equation. La ecuación de Majorana se obtiene cuando en (4.72) contraemos con P^μ y luego usamos la ecuación de Klein-Gordon.

De (4.73) y (4.58), para $\kappa = \frac{1}{2}$, obtenemos $W^\mu W_\mu = 0$. Así que el espín es cero, por lo que esta ecuación es equivalente a la nueva ecuación de Dirac, i.e., tienen la misma solución (4.70). Para $\kappa = 1$ tenemos,

$$W^\mu W_\mu = m^2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right), \quad (4.74)$$

así que el campo descrito por (4.72) tendrá espín $\frac{1}{2}$.

La solución de la ecuación de Staunton (4.72), en la representación de coordenadas del espacio interno, puede ser expresada en términos de la solución de la ecuación de Dirac (4.70),

$$\Psi_-(x, q) = (Bq_1 + Cq_2)\Psi_+(x, q), \quad (4.75)$$

donde B, C son constantes arbitrarias. Notamos que $\Psi_-(x, q)$ es una función impar bajo reflexiones de las coordenadas internas q_i ,

$$\mathcal{R}\Psi_-(x, q) = -\Psi_-(x, q).$$

En el sistema de reposo, (4.75) se reduce al primer estado excitado de un oscilador harmonico planar,

$$\begin{aligned} \Psi_-^{(0)}(t, q) &= (Bq_1 + Cq_2) \exp\left\{\frac{-(q_1^2 + q_2^2)}{2}\right\} \exp(-itm) \\ &= (B\langle q|10\rangle + C\langle q|01\rangle) \exp(-itm). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Estas soluciones pueden ser escritas también en la representación de Fock. En el sistema de reposo, (4.71) y (4.76) toman la forma,

$$\begin{aligned} |\Psi_+^{(0)}(x)\rangle &= \exp(-itm)\psi_{++}^0|00\rangle_{++}, & \text{espín } 0, \\ |\Psi_-^{(0)}(x)\rangle &= \exp(-itm)(\psi_{+-}^0|00\rangle_{+-} + \psi_{-+}^0|00\rangle_{-+}), & \text{espín } \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

(ver (4.35) para $J_+ = 0$, y (4.36) para $J_- = \frac{1}{2}$). Después de una transformación de Lorentz arbitraria, todos los estados del subespacio \mathcal{O}_+ o \mathcal{O}_- son alcanzados, cf. (4.38) y (4.39), donde los únicos coeficientes independientes serán ψ_{++}^{00} (espín 0), o ψ_{+-}^{00} y ψ_{-+}^{00} (espín 1/2). Mientras que todos los otros coeficientes serán combinaciones lineales de estos. Note también que,

$$S_z|00\rangle_{++} = 0, \quad S_z|00\rangle_{+-} = -\frac{1}{2}|00\rangle_{+-}, \quad S_z|00\rangle_{-+} = \frac{1}{2}|00\rangle_{-+}.$$

Capítulo 5

Supersimetría en la teoría de Majorana

Hemos visto que la ecuación de Dirac (4.64) and Staunton (4.72) extraen respectivamente, por medio de la ecuación de Klein-Gordon, las soluciones de espín $J = 0$ y $J = \frac{1}{2}$, desde el espectro de Majorana (4.1). Ahora mostramos que estos dos casos pueden ser unidos como un solo sistema supersimétrico [93]. Usando los proyectores (4.42)

$$(D_\mu^{1/2}\Pi_+ + D_\mu^1\Pi_-)|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (5.1)$$

donde los D_μ^κ , son los operadores en la ecuación de Staunton (4.72). Así (5.1) es equivalentemente

$$\mathcal{D}_\mu|\Psi(x)\rangle = 0, \quad \mathcal{D}_\mu = m\Gamma_\mu + \hat{\kappa}P_\mu - iS_{\mu\nu}P^\nu. \quad (5.2)$$

La ecuación (5.2) se consigue elevando la constante de Staunton κ a un operador, $\hat{\kappa}$, sobre \mathcal{O} ,

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{4}(3 - \mathcal{R}), \quad (5.3)$$

cual toma el valor apropiado para el sistema de Dirac y Staunton,

$$\hat{\kappa}|\Psi_+(x)\rangle = \frac{1}{2}|\Psi_+(x)\rangle, \quad \hat{\kappa}|\Psi_-(x)\rangle = |\Psi_-(x)\rangle. \quad (5.4)$$

Sin embargo (5.2) difiere con la de Staunton equation (4.72) en que el operador $\hat{\kappa}$ es no-local en las variables internas q_i , $i = 1, 2$. Además, debido a que la solución general de (5.2) es una combinación arbitraria de (4.70) and (4.75), nuestra ecuación activa simultáneamente los campos de espín 0 y $\frac{1}{2}$. Proyectando $\Pi_+\mathcal{D}_\mu|\Psi(x)\rangle = D_\mu^{1/2}|\Psi_+(x)\rangle$, conseguimos el sistema de espín-0 de Dirac, reducido al subespacio \mathcal{O}_+ , y para $\Pi_-\mathcal{D}_\mu|\Psi(x)\rangle = D_\mu^1|\Psi_-(x)\rangle$ conseguimos el sistema de Staunton de espín- $\frac{1}{2}$, en el subespacio \mathcal{O}_- . Finalmente, nuestra ecuación describe un supermultiplete con contenido de espín $(0, \frac{1}{2})$. Como condiciones de consistencia, nuestra ecuación (5.2) implica, otra vez, las Ecs. de Klein-Gordon and a Majorana,

$$(P^2 + m^2)|\Psi(x)\rangle = 0 \quad (5.5)$$

y

$$(P^\mu\Gamma_\mu - m\hat{\kappa})|\Psi(x)\rangle = 0. \quad (5.6)$$

La primera fija la masa en ambos sectores, a ser m . El término de masa en la ecuación de Majorana es ahora un operador, $M = m\hat{\kappa}$, el cual toma el valor correspondiente actuando en cada subespacio,

$$\begin{aligned}\Pi_+(P^\mu\Gamma_\mu - m\hat{\kappa})|\Psi(x)\rangle &= (P^\mu\Gamma_\mu - \frac{1}{2}m)|\Psi_+(x)\rangle, & \text{espín entero,} \\ \Pi_-(P^\mu\Gamma_\mu - m\hat{\kappa})|\Psi(x)\rangle &= (P^\mu\Gamma_\mu - m)|\Psi_-(x)\rangle, & \text{espín semi-entero.}\end{aligned}\tag{5.7}$$

La ecuación de Klein-Gordon (5.5) implica que el espín de cada solución en (5.7) es obligatoriamente el mas bajo posible, es decir, cero para $|\Psi_+(x)\rangle$ y $\frac{1}{2}$ para $|\Psi_-(x)\rangle$. Esto es consistente con la formula de masa (4.34), la cual produce la *misma* masa para $|\Psi_+(x)\rangle$ y $|\Psi_-(x)\rangle$,

$$\frac{m/2}{0 + 1/2} = \frac{m}{1/2 + 1/2} = m$$

cf. también (5.5). Debido a nuestra representación específica (4.8) de $SO(3,2)$, tenemos las relaciones (4.22), de las cuales obtenemos la identidades

$$W^\mu\mathcal{D}_\mu \equiv 0, \quad \mathcal{P}^\mu\mathcal{D}_\mu \equiv 0,\tag{5.8}$$

donde W^μ es vector de Pauli-Lubanski, y

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{1}{2}P_\mu + (3\hat{\kappa} - 1)(P\Gamma)\Gamma_\mu + i\hat{\kappa}S_{\mu\nu}P^\nu.\tag{5.9}$$

Las relaciones (5.8) indican que solo dos componentes de \mathcal{D}_μ producen ecuaciones independientes. Las cuatro componentes son necesarias para asegurar la covarianza explícita de la teoría.

Ahora debemos identificar el operador de supercarga. Consideremos el operador espinorial,

$$Q_a = \frac{1}{\sqrt{m}}(-i\mathcal{R}P^\mu\gamma_\mu + m)_a{}^b L_b \quad a = 1, \dots, 4,\tag{5.10}$$

donde L_a son las supercargas del álgebra interna $osp(4|1)$, en (4.6). Este operador es observable con respecto a las ecuaciones de movimiento, debido a que

$$[\mathcal{D}_\mu, Q_a] = -\frac{i}{2m}\mathcal{R}(P^2 + m^2)(\gamma_\mu)_a{}^b L_b + (i\gamma_\mu - \frac{1}{m}P_\mu)_a{}^b D_b \Pi_+ \approx 0,\tag{5.11}$$

y consistentemente, también con respecto a las ecuaciones de Klein-Gordon y Majorana. En (5.11) D_b es el operador de Dirac en (4.64); aquí y en lo que sigue \approx denota igualdad sobre la superficie definida por las ecuaciones de campo.

Este operador transforma la partícula de espín 0 a la de espín $\frac{1}{2}$, y vice-versa. Para mostrar esto, sea $|\Psi_\pm(x)\rangle = \Pi_\pm|\Psi(x)\rangle$ la solución de (5.2). Entonces, debido a Ecs. (4.44) y (5.11), tenemos $Q_a\Pi_\pm = \Pi_\mp Q_a$, y

$$Q_a|\Psi_\mp(x)\rangle \approx |\Psi_\pm(x)\rangle.$$

Es ilustrativo verificar esto en el sistema de reposo, donde

$$Q_a^{(0)}|\Psi_\pm^{(0)}(x)\rangle = \sqrt{2m}(a_1^\pm, a_2^\pm, \pm ia_1^\pm, \pm ia_2^\pm)|\Psi_\pm^{(0)}(x)\rangle.\tag{5.12}$$

con (4.77), Ec. (5.12) produce

$$Q_a^{(0)}|\Psi_+^{(0)}(x)\rangle \approx |\Psi_-^{(0)}(x)\rangle, \quad Q_a^{(0)}|\Psi_-^{(0)}(x)\rangle \approx |\Psi_+^{(0)}(x)\rangle.$$

El operador Q_a satisface la relaciones de anticonmutación no lineales,

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} = & (-3P^\mu + Z^\mu)(\gamma_\mu)_{ab} - 4imZ^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{ab} \\ & + \frac{2}{m}(P^2 + m^2)(iS_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + 4i\frac{1}{P^2}P_\mu S_{\nu\lambda}P^\lambda\gamma^{\mu\nu} + \Gamma_\mu\gamma^\mu)_{ab} - \frac{4}{m}(P\Gamma - m\hat{\kappa})(\gamma_\mu P^\mu)_{ab}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde

$$Z^\mu = -\mathcal{R}P^\mu, \quad Z^{\mu\nu} = \pi^{\mu\rho}\pi^{\nu\lambda}S_{\rho\lambda}, \quad (5.14)$$

y

$$\pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2} \approx \eta_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{m^2}. \quad (5.15)$$

Notemos que, $Z_{\mu\nu}$ es la expresión covariante del operador de espín S_{ij} . (En el sistema de reposo, los proyectores se reducen a $\pi_{\mu\nu} = (0, \delta_{ij})$ así que $Z_{\mu\nu}$ se reduce a S_{ij} .) Observamos que el primer término en el anticonmutador (5.13), $(-3P^\mu + Z^\mu)\gamma_\mu = -(3 + \mathcal{R})(P\gamma)$, es definido positivo.

Los términos en la segunda línea de (5.13) incluyen, como factores los operadores en las Ecs. de Klein-Gordon y Majorana. Estos producen cero, en la superficie definida por las ecuaciones de movimiento. Así, *on-shell* obtenemos el anticonmutador,

$$\{Q_a, Q_b\} \approx (-3P^\mu + Z^\mu)(\gamma_\mu)_{ab} - 4imZ^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{ab}. \quad (5.16)$$

Los generadores de transformaciones de Lorentz y traslaciones P_μ y $\mathcal{J}_{\mu\nu}$, junto con la supercarga Q_a , producen las relaciones de conmutación

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\lambda}\mathcal{J}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\mathcal{J}_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{J}_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\mathcal{J}_{\mu\rho}), \quad (5.17)$$

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(\eta_{\mu\lambda}P_\nu - \eta_{\nu\lambda}P_\mu), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, Q_a] = -(\gamma_{\mu\nu})_a{}^b Q_b, \quad [P_\mu, Q_a] = 0. \quad (5.18)$$

Los operadores P_μ , $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ y Q_a , junto con los Z_μ y $Z_{\mu\nu}$ que aparecen en el anticonmutador de las supercargas, forman un conjunto de simetrías, de nuestro sistema,

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{A}] \approx 0, \quad \text{for } \mathcal{A} = \mathcal{J}_{\mu\nu}, P_\mu, Q_a, Z_\mu, Z_{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

El operador de reflexión, en esta estructura (super)álgebraica, juega el papel de operador de graduación,

$$[\mathcal{R}, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = 0, \quad [\mathcal{R}, P_\mu] = 0, \quad [\mathcal{R}, Z_\mu] = 0, \quad [\mathcal{R}, Z_{\mu\nu}] = 0, \quad \{\mathcal{R}, Q_a\} = 0. \quad (5.20)$$

Sin embargo aquí no tenemos, como en 2+1-dimensiones (ver (3.8), (3.9) y (3.11)), una superálgebra de Lie, incluso *on-shell*. Esto se debe a que Z_μ y $Z_{\mu\nu}$ son tensores de Lorentz

invariantes bajo traslaciones, pero sus conmutadores con Q_a son no-triviales y no-lineales en los generadores de simetría,

$$[Z_\mu, Q_a] = 2Z_\mu Q_a, \quad [Z_{\mu\nu}, Q_a] = -\pi_{\mu\lambda}\pi_{\nu\rho}(\gamma^{\lambda\rho})_a{}^b Q_b. \quad (5.21)$$

Note también que,

$$\begin{aligned} [Z_\mu, Z_\nu] &= 0, & [Z_\mu, Z_{\nu\lambda}] &= 0, \\ [Z_{\mu\nu}, Z_{\lambda\rho}] &= i(\pi_{\mu\lambda}Z_{\nu\rho} + \pi_{\nu\rho}Z_{\mu\lambda} - \pi_{\mu\rho}Z_{\nu\lambda} - \pi_{\nu\lambda}Z_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A pesar de estas complicaciones relacionadas a la no-linealidad, un operador invariante puede ser identificado con el operador de Casimir de superespín (hasta factor m^2),

$$\mathcal{C} = W^\mu W_\mu - \frac{1}{64}\chi^\mu\chi_\mu, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \approx 0, \quad (5.23)$$

donde $\chi_\mu = Q^a(\gamma_\mu)_a{}^b Q_b$. *On-shell* este toma el valor

$$\mathcal{C} = m^2.$$

A pesar de tener una estructura no-lineal del tipo W-álgebra [98], la identidad de Jacobi es válida debido a la asociatividad de los operadores involucrados.

5.1. Ecuaciones de Majorana-Klein-Gordon y supersimetría de partículas de espín alto

Ya notamos que las principales características de la teoría de Majorana sugieren fuertemente que algún aspecto de supersimetría debe estar involucrado. Hemos mostrado que de hecho esto ocurre, para nuestra modificación de la ecuación de Majorana (5.6), para los estados de espines más bajo, es decir, cero y un medio. Es natural por lo tanto, preguntar si esto puede ser generalizado a otros estados de espín superior. Requiriendo supersimetría, a priori, sabemos que P^2 debe ser un operador de Casimir. Esto es consecuencia de la invarianza de traslaciones de la supercarga $[Q_a, P_\mu] = 0$. Entonces, esperamos que la ecuación de Klein-Gordon aparezca como una condición de consistencia. De hecho, cuando imponemos simultáneamente,

$$(P^2 + m^2)|\Psi_J(x)\rangle = 0, \quad (P^\mu\Gamma_\mu - M_J)|\Psi_J(x)\rangle = 0 \quad (5.24)$$

donde $M_J = (J + \frac{1}{2})m$, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, extraimos desde el espectro infinito de la ecuación de Majorana, una representación irreducible del grupo de Poincaré de masa m , espín J y energía positiva.

Nuestro objetivo aquí será generalizar la supersimetría del supermultiplete de espín $(0, \frac{1}{2})$ a uno con contenido de espín arbitrario (J_+, J_-) tal que $|J_+ - J_-| = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Por convención, J_+ es entero y J_- semi-entero. Primero, generalizamos la ecuación de Majorana (4.1) a

$$(P^\mu\Gamma_\mu - \hat{M}_{S,\Delta})|\Psi(x)\rangle = 0, \quad (5.25)$$

donde el parametro de masa a sido cambiado por el operador (cf. (5.6)),

$$\hat{M}_{\mathcal{S},\Delta} = m \left(\mathcal{S} + \frac{1}{2} - \mathcal{R}\Delta \right), \quad (5.26)$$

$$\mathcal{S} = \frac{J_+ + J_-}{2}, \quad \Delta = \frac{J_- - J_+}{2}, \quad J_+ = 0, 1, \dots, \quad J_- = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (5.27)$$

Proyectado al los subespacios par e impar del espacio de Fock, esta ecuación produce

$$\Pi_{\pm} (P^{\mu} \Gamma_{\mu} - \hat{M}_{\mathcal{S},\Delta}) |\Psi(x)\rangle = (P^{\mu} \Gamma_{\mu} - M_{J_{\pm}}) |\Psi_{\pm}(x)\rangle = 0, \quad (5.28)$$

$$J_+ = 0, 1, \dots, \quad J_- = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (5.29)$$

donde los campos $|\Psi_{\pm}(x)\rangle = \Pi_{\pm} |\Psi(x)\rangle$ son proyecciones a los subespacios par e impar \mathcal{O}_{\pm} . Aquí hemos empleado ecs. (4.41), (4.42) y (4.44). Por construcción, la solución de (5.25) es la suma de $|\Psi_+(x)\rangle$ y $|\Psi_-(x)\rangle$ pertenecientes a las series de espín entero (J_+) y semi-entero (J_-), respectivamente, de las soluciones de la ecuación de Majorana (4.1). Teniendo en cuenta, $\hat{M}_{\mathcal{S},\Delta} |\Psi(x)\rangle = M_{J_{\pm}} |\Psi_{\pm}(x)\rangle$, sigue de la formula de masa (4.34),

$$m_J = \frac{M_{J_{\pm}}}{J + 1/2} = \frac{m(J_{\pm} + 1/2)}{J + 1/2}, \quad \text{en } \mathcal{O}_{\pm}.$$

De aquí que los estados de espín J_+ y J_- tiene igual masa; m . (5.25) tiene por lo tanto un supermultiplete en su espectro, el cual es descrito por las ecuaciones

$$(P^2 + m^2) |\Psi_{\mathcal{S},\Delta_n^{\pm}}(x)\rangle = 0, \quad (P^{\mu} \Gamma_{\mu} - \hat{M}_{\mathcal{S},\Delta_n^{\pm}}) |\Psi_{\mathcal{S},\Delta_n^{\pm}}(x)\rangle = 0, \quad \Delta_n^{\pm} = \pm \left(\frac{2n+1}{4} \right). \quad (5.30)$$

Su contenido de espín es,

$$(J_+ = \mathcal{S} - \Delta_n^{\pm}, J_- = \mathcal{S} + \Delta_n^{\pm}). \quad (5.31)$$

A esta degeneración de masas para las soluciones de (5.25), debe estar asociado un operador observable, supercarga, que relaciona ambos estados. A continuación construimos estos operadores, empezando por el caso más simple.

5.1.1. Supermultiplete (J_+ , J_-) para $|\Delta J| = 1/2$

Acá encontraremos el operador de supercarga para el supermultiplete descrito por (5.30) cuando $n = 0$, es decir, un supermultiplete usual con campos que difieren en espín 1/2. La supercarga es,

$$Q_a^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{m}} (\mp i \mathcal{R} P^{\mu} \gamma_{\mu} + m)_a{}^b L_b, \quad \Delta J = \pm \frac{1}{2}. \quad (5.32)$$

Donde definimos $\Delta J \equiv J_+ - J_-$. Este es un operador hermitico y observable con respecto a las ecuaciones (5.30), para $n = 0$,

$$[P^{\mu} \Gamma_{\mu} - \hat{M}_{\mathcal{S},\Delta_0^{\pm}}, Q_a^{(\pm)}] = \pm \frac{\mathcal{R} L_a}{2} (P^2 + m^2) \approx 0, \quad [(P^2 + m^2), Q_a^{(\pm)}] = 0. \quad (5.33)$$

La primera ecuación de (5.33) solo expresa el requerimiento de supersimetría de que las partículas en el supermultiplete deben tener la misma masa y así, se requiere la ecuación de

Klein-Gordon. Siendo un operador espinorial, este intercambia estados físicos de espín J_+ y espín J_- .

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.30), las relaciones de anti-conmutación (5.16) son cambiadas por,

$$\{Q_a^{(\pm)}, Q_b^{(\pm)}\} \approx -2(1 + 2\mathcal{S})P^\mu(\gamma_\mu)_{ab} \pm Z^\mu(\gamma_\mu)_{ab} - 4imZ^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{ab}, \quad \Delta J = \pm\frac{1}{2}, \quad (5.34)$$

donde

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots, \quad \text{para } \Delta J = \frac{1}{2}, \quad \text{y } \mathcal{S} = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \dots, \quad \text{para } \Delta J = -\frac{1}{2},$$

y Z' s son los mismos que en (5.14).

La estructura algebraica de (5.16)–(5.18), (5.20)–(5.22), con (5.16) cambiado por (5.34), se preserva. Los Z' s son cargas conservadas con respecto a las ecuaciones (5.30). El operador invariante relacionado al super-espín es ahora,

$$C^+ = W^\mu W_\mu - \frac{1}{64}\chi^\mu\chi_\mu, \quad \Delta J = +\frac{1}{2}, \quad (5.35)$$

$$C^- = W^\mu W_\mu + \frac{1}{3 \cdot 64}\chi^\mu\chi_\mu, \quad \Delta J = -\frac{1}{2}, \quad (5.36)$$

y toma el valor fijo,

$$C^+ = 2m^2 \left(\mathcal{S} + \frac{3}{4} \right) \left(\mathcal{S} + \frac{1}{4} \right), \quad \mathcal{S} = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots, \quad (5.37)$$

$$C^- = \frac{2m^2}{3} \left(\mathcal{S} - \frac{1}{4} \right) \left(\mathcal{S} + \frac{5}{4} \right), \quad \mathcal{S} = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \dots \quad (5.38)$$

Así (5.30) describe un super-multiplete masivo de espines $(J_+, J_+ \pm 1/2)$ y masa m .

Límite de super-espín grande

Es interesante estudiar el comportamiento de nuestra superálgebra para valores grandes del super-espín. Redefinamos primero la supercarga (5.32),

$$Q_a^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mathcal{S}}} Q_a^{(\pm)}. \quad (5.39)$$

Off-shell esta satisface las relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{Q_a^{(\pm)}, Q_b^{(\pm)}\} &= -2P^\mu(\gamma_\mu)_{ab} \pm \frac{1}{1 + 2\mathcal{S}} Z^\mu(\gamma_\mu)_{ab} - \frac{4im}{1 + 2\mathcal{S}} Z^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{ab} \\ &+ \frac{2(P^2 + m^2)}{m(1 + 2\mathcal{S})} \left(iS_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + 4i\frac{1}{P^2} P_\mu S_{\nu\lambda} P^\lambda \gamma^{\mu\nu} + \Gamma_\mu \gamma^\mu \right)_{ab} - \frac{4}{m(1 + 2\mathcal{S})} (P\Gamma - \hat{M}_S)(\gamma_\mu P^\mu)_{ab}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

mientras que los conmutadores de Z_μ y $Z_{\mu\nu}$ con $\mathcal{Q}_a^{(\pm)}$ se mantienen de la forma (5.21). Cuando $\mathcal{S} \rightarrow \infty$, (5.40) toma la forma usual del álgebra de super-Poincaré con $N = 1$,

$$\{\mathcal{Q}_a^{(\pm)}, \mathcal{Q}_b^{(\pm)}\} = -2P^\mu(\gamma_\mu)_{ab}. \quad (5.41)$$

Por otro lado, definiendo

$$W_{\mu\nu} = -\frac{4m}{1+2\mathcal{S}}Z_{\mu\nu}$$

en este límite obtenemos,

$$\{\mathcal{Q}_a^{(\pm)}, \mathcal{Q}_b^{(\pm)}\} = -2P^\mu(\gamma_\mu)_{ab} + W^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\nu})_{ab}, \quad \text{and} \quad [W_{\mu\nu}, \mathcal{Q}_a^{(\pm)}] = 0. \quad (5.42)$$

Usando (5.22), conseguimos

$$[W_{\mu\nu}, W_{\lambda\rho}] = \frac{4m}{1+2\mathcal{S}}(\pi_{\mu\lambda}W_{\nu\rho} + \pi_{\nu\rho}W_{\mu\lambda} - \pi_{\mu\rho}W_{\nu\lambda} - \pi_{\nu\lambda}W_{\mu\rho}),$$

y en el límite $\mathcal{S} \rightarrow \infty$, encontramos que $W_{\mu\nu}$ se vuelve una carga tensorial abeliana.

Así, con (5.41) o (5.42), *off-shell* obtenemos super-Poincaré sin o con carga central tensorial abeliana y la no-linearidad de la superálgebra previa desaparece. Estas cargas pueden ser comparadas con aquellas cargas tensoriales que aparecen en contextos de supergravedad y superbranas [94, 95, 96, 97].

5.1.2. Supermultiplete (J_+, J_-) para $|\Delta J| = n + 1/2$ arbitrario

Aquí construimos el operador de supercarga en el caso general de un supermultiplete (J_+, J_-) y $\Delta J = \pm(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Este operador es simplemente [44],

$$Q_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}^{(\pm, n)} = Q_{a_1}^{(\pm)} Q_{a_2}^{(\mp)} \dots Q_{a_{2n+1}}^{(\pm)}, \quad \text{para} \quad \Delta J = \pm(n + 1/2). \quad (5.43)$$

Este es un operador físico, debido a sus relaciones de conmutación con las ecuaciones de movimiento,

$$[P^\mu \Gamma_\mu - \hat{M}_{\mathcal{S}, \Delta_n^\pm}, Q_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}^{(\pm, n)}] = \quad (5.44)$$

$$\pm \frac{\mathcal{R}(P^2 + m^2)}{2\sqrt{m}} (L_{a_1} Q_{a_2}^{(\mp)} Q_{a_3}^{(\pm)} \dots Q_{a_{2n+1}}^{(\pm)} + Q_{a_1}^{(\pm)} L_{a_2} Q_{a_3}^{(\pm)} \dots Q_{a_{2n+1}}^{(\pm)} + \dots + Q_{a_1}^{(\pm)} Q_{a_2}^{(\mp)} \dots Q_{a_{2n}}^{(\mp)} L_{a_{2n+1}}),$$

$$[(P^2 + m^2), Q_a^{(\pm)}] = 0, \quad (5.45)$$

las cuales *on-shell*, producen cero. También se puede corroborar que estos son operadores hermiticos. $(Q_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}^{(\pm, n)})^\dagger = Q_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}^{(\pm, n)}$. El operador (5.43) mapea estados físicos de espín semi-entero J_- a estados físicos de espín entero $J_+ = J_- \pm (n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y viceversa. El operador (5.43) nos provee de una generalización de supersimetría, sin embargo su (anticommutador) se complica extremadamente para $n > 0$, ya que en general es un operador altamente no lineal (involucra derivadas de orden n).

En esta forma, el sistema de ecuaciones de Majorana-Klein-Gordon (5.30) describe, universalmente, un super-multiplete masivo de espines $(J_+, J_-) = (\mathcal{S} - \frac{\Delta J}{2}, \mathcal{S} + \frac{\Delta J}{2})$. Nuestro resultado previo es plenamente recuperado para $\mathcal{S} = \frac{1}{4}$ and $\Delta J = \frac{1}{2}$.

5.2. Supermultiplete infinito

Considere el conjunto de campos $|\Psi_J(x)\rangle$ tal que satisfacen el sistema de ecuaciones de Majorana-Klein-Gordon (5.24)

$$(P^2 + m^2)|\Psi_J(x)\rangle = 0, \quad (P^\mu \Gamma_\mu - M_J)|\Psi_J(x)\rangle = 0, \quad J = 0, 1/2, 1, \dots, \quad (5.46)$$

Estos campos tienen espín J y masa m , así existe una degeneración infinita de masas. y definamos

$$D_a^\pm = \frac{1}{m}(\pm i P^\mu \gamma_\mu + m)_a{}^b L_b. \quad (5.47)$$

La nueva ecuación de Dirac [7](4.64) puede ser escrita ahora

$$D_a^- \phi(x, q) = 0.$$

Sabemos como condiciones de consistencia produce $(P^2 + m^2)\phi(x, q) = 0$, $(P\Gamma - \frac{m}{2})\phi(x, q) = 0$. Por lo tanto describe la primera partícula (de espín cero) en la serie (5.46). Es interesante que en un proceso constructivo, todas las partículas en (5.46) pueden ser obtenidas a partir del campo básico escalar $\phi(x) = \Psi_{J=0}(x)$. De hecho no es difícil mostrar que el campo,

$$\Psi_J(x, q) = \zeta^{a_1 a_2 \dots a_{2J}} \Psi_{a_1 a_2 \dots a_{2J}}(x, q) = 0, \quad \Psi_{a_1 a_2 \dots a_{2J}}(x, q) = D_{a_1}^+ D_{a_{2J}}^+ \dots D_{a_{2J}}^+ \phi(x, q),$$

donde $\zeta^{a_1 a_2 \dots a_{2J}}$ son constantes arbitrarias (Grassmann-par), satisface las ecuaciones (5.46). Demostremos esto. Tomé el campo,

$$\Psi'_{J\pm 1/2}(x, q) = \zeta^a D_a^\pm \Psi_J(x, q). \quad (5.48)$$

Ahora, suponiendo que $\Psi_J(x, q)$ satisface la ecuación (5.46), consideramos un campo $\Psi'_{J\pm 1/2}(x, q)$. Entonces,

$$(P^2 + m^2)\Psi'_{J\pm 1/2}(x, q), \quad (P\Gamma - m(J + 1/2 \pm 1/2))\Psi'_{J\pm 1/2}(x, q) = 0, \quad J = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (5.49)$$

Por lo tanto este tiene masa m y espín $J \pm 1/2$. Este resultado sigue de,

$$[P\Gamma, D_a^\pm] = \mp \frac{1}{2m}(P^2 + m^2)L_a \pm \frac{m}{2}D_a^\pm, \quad [P^2 + m^2, D_a^\pm] = 0,$$

el cual produce

$$(P\Gamma - m(J + 1/2 \pm 1/2))\Psi'_{J\pm 1/2}(x, q) = \zeta^a D_a^\pm (P\Gamma - m(J + 1/2))\Psi_J(x, q) \quad (5.50)$$

$$\mp \frac{\zeta^a L_a}{2m}(P^2 + m^2)\Psi_J(x, q), \quad (5.51)$$

que son cero de acuerdo a nuestra suposición. Debido a que esto es cierto para el campo escalar de Dirac $\phi(x) = \Psi_{J=0}(x)$, todos los campos $\Psi_{J\neq 0}(x)$ pueden ser contruidos a partir de este.

D_a^\pm son operadores físicos con respecto al sistema de campos (5.46), así que la combinación lineal

$$L_a = (D_a^+ + D_a^-)/2,$$

lo es también. Esta es la supercarga (4.6) de $osp(4|1)$, de aquí todos los generadores $osp(4|1)$ son operadores observables. Por otra parte estas son invariantes de traslaciones, por lo que son una simetría interna de (5.46). Concluimos entonces que (5.46) describe un supermultiplete infinito el cual posee una simetría interna $osp(4|1)$.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios adicionales

6.0.1. Resumen de los resultados principales

Hemos construido un sistema supersimétrico de anyones el cual esta determinado por un conjunto de ecuaciones de movimiento covariantes (3.3). Los campos llevan una representación del álgebra de super-Poincaré construida sin emplear variables de Grassmann (ecs. (3.8), (3.9) y (3.10)). *Of-shell* la super-álgebra contiene terminos no-lineales, pero la linealidad es recuperada *on-shell* o bien, en un límite de espín grande. Nuestro sistema, fue construido en base a el álgebra infinito-dimensional, unitaria e irreducible, del álgebra de Heisenberg deformada la cual lleva dos representaciones irreducibles del grupo de Lorentz $SO(2, 1)$, con sus espines desplazados en un medio. Esto, nos permitio construir el supermultiplete descrito por nuestras ecuaciones. Las representaciones de grupo de Lorentz discutidas, son los análogos de aquellas en (3+1) dimensiones, de dimensión infinita y unitarias descubiertas por Majorana [5]. Basados en esta analogía, construimos un sistema de ecuaciones covariantes describiendo un supermultiplete de espín $(0, 1/2)$ en (3+1)D. Generalizado la ecuación de Majorana en (3+1)D, construimos un supermultiplete de espín arbitrario $(j, j + 1/2)$. El álgebra de super-Poincaré que caracteriza estos supermultipletes, es aumentada con términos no lineales, que aún *off-shell* son preservados. Sin embargo, en un límite de espín grande, la no linealidad es eliminada, obteniendo el álgebra de super-Poincaré usual con $N=1$, o bien extendida por una carga tensorial central. En (3+1)D, las partículas en el supermultiplete tienen diferentes grados de libertad, los cuales corresponden a los estado de polarización o proyección del espín en el eje z . Esto causa la no-linealidad de nuestra superálgebra. Cuando el espín tiende a infinito $J_{\pm} \rightarrow \infty$, esta nolinealidad desaparece, en la misma forma que $1/J_{+} \rightarrow 1/J_{-}$. Obtuvimos también una generalización de supersimetría, donde las parejas supersimétricas tienen espines desplazados en un número semi-entero arbitrario. Observamos también que a partir del campo escalar de Dirac (4.64), es posible construir una torre infinita de estados con espines enteros o semientero, de masa m . todos estos campos pueden ser relacionados por medio de los generadores del álgebra $osp(4|1)$, esta es, una simetría interna.

6.1. Comentarios generales

Un problema de las teorías tratadas aquí, es que parecen presentar problemas con las interacciones electromagnéticas. De hecho, no son conocidas soluciones acopladas a alguna interacción de gauge en las ecuaciones de Majorana, Staunton o la nueva ecuación de Dirac, o sus análogos en (2+1) dimensiones. En particular, Dirac observó que su nueva ecuación es inconsistente con la prescripción de acoplamiento minimal $U(1)$ [7, 8, 101]. Es decir la consistencia de las ecuaciones requiere que el campo $U(1)$ tenga curvatura trivial, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$. Staunton intentó resolver este problema y probó que su ecuación [9] no presenta en forma inmediata, como ocurren con la nueva ecuación de Dirac, la obstrucción $F_{\mu\nu} = 0$. Sin embargo corroborando la consistencia de las ecuaciones acopladas minimalmente uno obtiene cada vez, nuevos vínculos que imponen restricciones sobre la derivadas de la curvatura de gauge, y el proceso parece no detenerse. Así, la pregunta de si las teorías de Majorana y Staunton tiene o no soluciones acopladas a un campo de gauge no trivial se mantiene abierta. Los campos de Majorana pueden ser vistos como un conjunto infinito de campos escalares, que satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. La ecuación de Majorana acopla los diferentes campos en una forma delicada tal que el conjunto de estos puede adquirir un espín distinto de cero. Desde este punto de vista, puede ser, que la introducción de un campo-electromagnético externo rompa este equilibrio y así, los campos de Majorana no pueden ser observables, a menos que exista una solución muy particular que deje invariante el sistema. Las ideas de Staunton también han sido extendidas a un espacio curvo [100].

Los campos de espín superior pueden ser descritos a través de super-twistores [102, 103, 104]. En particular, las descripciones [102, 103], se basan en la representación fundamental de $osp(4|1)$. Ahí los twistores λ_α satisfacen un álgebra Heisenberg 2-dimensional en la misma forma que las supercargas de $osp(4|1)$, L_a , que empleamos en nuestra generalización supersimétrica de la teoría de Majorana. De hecho, la relación $L^a L_a = 2i$ es equivalente al vínculo de helicidad en teoría de twistores. La característica principal de los twistores es que ellos se relacionan a generadores de simetrías del espacio tiempo mediante vínculos del tipo $P_\mu - \lambda\gamma_\mu\lambda = 0$. En este contexto nuestra ecuación vectorial (5.2) tiene una forma análoga (ver Ec. (6.1) abajo) y genera un vínculo para la masa. Las ecuaciones de Majorana, Dirac y Staunton pueden reescribirse en la forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}P^\mu(\gamma_\mu)^{ab}L_aL_b + M &= 0, & \text{Majorana,} \\ mL^a - iP^\mu(\gamma_\mu)^{ab}L_b &= 0, & \text{NDE,} \\ \kappa P_\mu - \frac{m}{4}(\gamma_\mu)^{ab}L_aL_b - \frac{1}{2}P^\nu(\gamma_{\mu\nu})^{ab}L_aL_b &= 0, & \text{Staunton,} \end{aligned} \tag{6.1}$$

y compararse con los vínculos en la formulación de twistores de campos masivos de espín superior (ver por ejemplo [106, 107, 108, 109]).

La construcción de nuestras supercargas sin variables de Grassmann es posible gracias al operador de reflexión R [\mathcal{R}] en (2+1)D [(3+1)D], el que juega el papel de operador de graduación. El operador de reflexión es un operador (diferencial) no-local en los grados de libertad internos, debido a su serie infinita (2.45) [(4.26)]. Como una aplicación de supersimetría sin variables de Grassmann observamos que en la sección 5.1.2 que dos estados

de espines desplazados en un número $n + 1/2$ arbitrario pueden ser mapeados uno a otro por un operador diferencial de orden $2n + 1$, en la supercarga (5.47). En el caso usual de supersimetría, esto no podría ser posible. En una cierta potencia de la supercargas el operador obtenido será trivial, debido a la naturaleza de Grassmann de las componentes de las supercarga. La representación “bosonica” de $osp(4|1)$ empleada por nosotros, fue usada también por Biedenharn [110], en una generalización de supersimetría. El encuentro que dos compañeros supersimétricos pueden tener masas diferentes, basandose en una ecuación diferencial análoga a la de Majorana y cuyas soluciones tienen espín entero o semi-entero ubicandose en trayectorias de Regge lineales. La supercarga encontrada por el, mapea estados físicos a estados físicos y son operadores no locales en las variables internas y de espacio tiempo. Parece entonces que cuando se consideran supercargas “bosonicas” se abren nuevas posibilidades para las realizaciones supersimetría.

Estas posibilidades se presentan cuando los campos de la teoría son representados por medio de variables conmutativas. Nuestra afirmación es que esto es posible a nivel clásico y de primera cuantización. Sabemos que en segunda cuantización, los campos de Bose y Fermi deben ser cuantizados, según el teorema de espín estadística, con relaciones de conmutación o anti-conmutación¹, respectivamente. Surge entonces la pregunta de si los campos de Majorana satisfacen o no el teorema de espín-estadística y de si supersimetría sin variables de Grassmann sobrevive de alguna forma después de cuantización. La primera pregunta fue respondida en forma afirmativa [82] mientras que la segunda es una pregunta abierta.

Otro aspecto interesante, concierne al comportamiento colectivo de un sistema infinito de fermiones como un anyon. Para esto consideramos el sistema de ecuaciones [65],

$$(P\gamma - m)_a{}^b \psi_b^m(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

$$(J\gamma - \alpha)_a{}^b{}_{nm} \psi_b^m(x) = 0. \quad (6.3)$$

Estas describen una representación irreducible del grupo de Poincaré con espín $\alpha - 1/2$ y masa m . Pero podemos entender esta ecuación en otra manera. (6.2) puede ser interpretada como un conjunto infinito de campos de Fermi que satisfacen la ecuación de Dirac; estos tiene espín $1/2$ y masa m . Por otra parte, el número entero n etiqueta los diferentes campos de Fermi. El operador $J_\mu = (J_\mu)_{nn'}$ actúa sobre los grados de libertad n' del campo $\psi_b^{n'}(x)$, acoplando los diferentes campos de Fermi a través del vinculo (6.3), el que no involucra variables de espacio-tiempo. En forma colectiva, estos campos transforman bajo una representación,

$$\mathcal{J}_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} x^\nu p^\lambda + J_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu,$$

del álgebra de Lorentz, donde γ_μ son matrices de Dirac en una representación de Majorana. Observamos que cuando elegimos $\alpha = 1/2$, una solución del las ecuaciones (6.2) y (6.3),

$$\psi(x) = \sum_n \begin{pmatrix} \psi_1^n(x) \\ \psi_2^n(x) \end{pmatrix},$$

se transforma en un campo escalar. Aprendemos de esta ecuación que *muchos fermiones se pueden comportar como un boson y aquí más generalmente, como un anyon.*

¹Aunque recientemente han sido propuestas (e.g. [112, 113]) modificaciones en el formalismo de cuantización canónica mediante la deformación de los corchetes de Poisson.

Por otra parte, el índice n puede ser tratado como índice análogo al de isospín, pero recorriendo un rango infinito. Podríamos decir entonces que el vínculo (6.3) acopla grados de libertad de espín e isospín, resultando en un campo de espín $\alpha - 1/2$, con α relacionado al Casimir de “isospín” esto puede ser comparado con las teorías [2, 3, 4].

En el desarrollo de esta tesis, hemos hecho mención varias veces a la equivalencia de campos de Bose y Fermi en varios contextos.

Esto fue primero sugerido en el contexto de bosonización en (1+1)D. La extensión de estos conceptos a dimensiones a (2+1) dimensiones, esta relacionado a la existencia de anyones, donde en general, los campos básicos (bosones o fermiones) modifican su estadística debido a ciertas interacciones de gauge (de Chern-Simons). Desde un punto de vista los anyones en la descripción de teoría de grupos pueden ser considerados como un sistema infinito de bosones o fermiones acoplados de una forma muy precisa. Lo mismo ocurre en el caso de los campos de Majorana. En la teoría de 't Hooft-Hasenfratz-Jackiw-Rebbi de espín desde isospín, observamos que las componentes escalares del vector de isospín, pasan a ser parte de las componentes de un campo de Fermi, gracias a la presencia de un campo de monopolo, en la fase rota de la teoría $SU(2)$. Otra vez este comportamiento es realizado, bosones como constituyendo un fermión. Por otra parte, ha sido mostrado que la compactificación de teoría de la cuerda bosónica, sobre una variedad de 16 dimensiones, contiene efectivamente todas las teorías de supercuerdas [45, 46, 47, 48, 49]. De esto argumentos, uno podría preguntar, ¿puede ser que las partículas fundamentales sean bosones y que otras estadísticas, anyones o fermiones, sean construidos desde estas? Lo que hemos hecho en esta tesis, es estudiar algunos ejemplos donde los campos fermiónicos son construidos desde bosones y como supersimetría puede ser realizada en estos sistemas.

Apéndice A

Deformación del álgebra de Heisenberg: El operador de reflexión

Consideremos el álgebra de Heisenberg generada por b^+ and b^- ,

$$[b^-, b^+] = 1, \quad N = b^+b^-. \quad (\text{A.1})$$

Podemos ahora definir los operadores,

$$a^+ = b^+F(N) \quad a^- = F(N)b^-, \quad (\text{A.2})$$

$$F(N) = \sqrt{1 + \frac{\nu(1+(-1)^N)}{2(N+1)}}. \quad (\text{A.3})$$

Estos operadores satisfacen el álgebra de Heisenberg deformada

$$[a^-, a^+] = 1 + \nu R, \quad R = (-1)^N. \quad (\text{A.4})$$

Ahora el operador de número puede ser dado en términos de los nuevos operadores de creación y aniquilación,

$$N = \frac{1}{2}\{a^-, a^+\} - \frac{1}{2}(1 + \nu),$$

y satisface también $[N, a^\pm] = \pm a^\pm$. Los operadores a^+ y a^- actúan sobre el mismo espacio de Fock que b^+ y b^- , solo que ahora estos producen factores diferentes, como se deduce de (A.2,A.3). Los vectores en el espacio de Fock, pueden ser dados en términos de ambos operadores de creación.

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n|0\rangle = C_n(a^+)^n|0\rangle, \quad C_n = ([n]_\nu!)^{-1/2}, \quad [n]_\nu! = \prod_{l=1}^n [l]_\nu, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{A.5})$$

Aquí $[l]_\nu = l + \frac{1}{2}(1 - (-1)^l)\nu$. También se satisface $b^-|0\rangle = a^-|0\rangle = 0$, $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$.

Apéndice B

Representación de $\mathfrak{so}(3,2)$

Representación de Fock:

$$\begin{aligned} S^{01} &= -\frac{i}{4}(a_1^{+2} + a_2^{+2} - a_1^{-2} - a_2^{-2}), & S^{02} &= -\frac{1}{4}(a_1^{+2} - a_2^{+2} + a_1^{-2} - a_2^{-2}), & (B.1) \\ S^{03} &= \frac{1}{2}(a_1^+ a_2^+ + a_1^- a_2^-), & S^{12} &= \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \\ S^{13} &= -\frac{1}{2}(a_1^+ a_2^- + a_1^- a_2^+), & S^{23} &= \frac{i}{2}(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+), \\ \Gamma^0 &= -\frac{1}{2}(N_1 + N_2 + 1), & \Gamma^1 &= \frac{1}{4}(a_1^{+2} + a_2^{+2} + a_1^{-2} + a_2^{-2}), \\ \Gamma^2 &= -\frac{i}{4}(a_1^{+2} - a_2^{+2} - a_1^{-2} + a_2^{-2}), & \Gamma^3 &= \frac{i}{2}(a_1^+ a_2^+ - a_1^- a_2^-), \end{aligned}$$

Representación de Schrödinger:

$$\begin{aligned} S^{12} &= \frac{1}{4}(\eta_1^2 + q_1^2 - \eta_2^2 - q_2^2), & S^{13} &= -\frac{1}{2}(\eta_1 \eta_2 + q_1 q_2), & S^{23} &= -\frac{1}{2}(q_1 \eta_2 - q_2 \eta_1), & (B.2) \\ S^{01} &= -\frac{1}{2}(q_1 \eta_1 + q_2 \eta_2 + i), & S^{02} &= \frac{1}{4}(\eta_1^2 - q_1^2 - \eta_2^2 + q_2^2), & S^{03} &= -\frac{1}{2}(\eta_1 \eta_2 - q_1 q_2), \\ \Gamma^0 &= -\frac{1}{4}(\eta_1^2 + q_1^2 + \eta_2^2 + q_2^2), & \Gamma^1 &= -\frac{1}{4}(\eta_1^2 - q_1^2 + \eta_2^2 - q_2^2), \\ \Gamma^2 &= -\frac{1}{2}(q_1 \eta_1 - q_2 \eta_2), & \Gamma^3 &= \frac{1}{2}(q_1 \eta_2 + q_2 \eta_1). & (B.3) \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] E. P. Wigner, “On Unitary Representations Of The Inhomogeneous Lorentz Group,” *Annals Math.* **40**, 149 (1939) [*Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **6**, 9 (1989)].
- [2] R. Jackiw and C. Rebbi, “Spin From Isospin In A Gauge Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1116 (1976).
- [3] P. Hasenfratz and G. ’t Hooft, “A Fermion-Boson Puzzle In A Gauge Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1119 (1976).
- [4] A. S. Goldhaber, “Spin And Statistics Connection For Charge-Monopole Composites,” *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1122 (1976).
- [5] E. Majorana, “Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario,” *Nuovo Cimento* **9** (1932) 335.
- [6] M. Fradkin, “Comments on a paper by Majorana concerning elementary particles,” *Am. J. Phys.* **53** (1965) 314.
- [7] P. A. M. Dirac, “A positive-energy relativistic wave equation,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **322** (1971) 435, and *ibid.* “A positive-energy relativistic wave equation. 2,” **328** (1972) 1.
- [8] L.C. Biedenharn, M.Y. Han, “Generalization and interpretation of Dirac’s positive-energy relativistic wave equation,” *Phys. Rev.* **D 8** (1973) 1735.
- [9] L. P. Staunton, “A spin 1/2 positive energy relativistic wave equation,” *Phys. Rev.* **D 10** (1974) 1760.
- [10] V. Bargmann, “Irreducible unitary representations of the Lorentz group,” *Annals Math.* **48**, 568 (1947).
- [11] P. A. M. Dirac, “Unitary Representations Of The Lorentz Group,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **183**, 284 (1945).
- [12] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman, “Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance,” *JETP Lett.* **13**, 323 (1971) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **13**, 452 (1971)].
- [13] D. V. Volkov and V. P. Akulov, “Possible universal neutrino interaction,” *JETP Lett.* **16**, 438 (1972) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **16**, 621 (1972)].

-
- [14] D. V. Volkov and V. P. Akulov, "Is the Neutrino a Goldstone Particle?," *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).
- [15] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, "All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix," *Nucl. Phys. B* **88**, 257 (1975).
- [16] P. Fayet and J. Iliopoulos, "Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors," *Phys. Lett. B* **51**, 461 (1974).
- [17] J. Iliopoulos and B. Zumino, "Broken Supergauge Symmetry And Renormalization," *Nucl. Phys. B* **76**, 310 (1974).
- [18] J. M. Leinaas and J. Myrheim, "On the theory of identical particles," *Nuovo Cim. B* **37**, 1 (1977).
- [19] F. Wilczek, "Magnetic Flux, Angular Momentum, And Statistics," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1144 (1982).
- [20] F. Wilczek, "Quantum Mechanics Of Fractional Spin Particles," *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
- [21] F. Wilczek and A. Zee, "Linking Numbers, Spin, And Statistics Of Solitons," *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2250 (1983).
- [22] G. W. Semenoff and P. Sodano, "Exotic Spin And Statistics In (2+1)-Dimensional Canonical Quantum Field Theory," *Nucl. Phys. B* **328**, 753 (1989).
- [23] J. Frohlich and P. A. Marchetti, "Quantum Field Theories of Vortices and Anyons," *Commun. Math. Phys.* **121**, 177 (1989).
- [24] I. J. R. Aitchison, "Berry phases, magnetic monopoles and Wess-Zumino terms or how skyrmion got its spin," *Acta Phys. Polon. B* **18**, 207 (1987).
- [25] S. R. Coleman, "Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model," *Phys. Rev. D* **11**, 2088 (1975).
- [26] S. Mandelstam, "Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation," *Phys. Rev. D* **11**, 3026 (1975).
- [27] E. Witten, "Nonabelian bosonization in two dimensions," *Commun. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).
- [28] A. M. Polyakov, "Fermi-Bose Transmutations Induced by Gauge Fields," *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 325 (1988).
- [29] H. C. Tze, "Manifold splitting regularization, selflinking, twisting, writhing numbers of space-time ribbons and Polyakov's Fermi-Bose transmutation," *Int. J. Mod. Phys. A* **3**, 1959 (1988).

- [30] S. Iso, C. Itoi and H. Mukaida, “Geometric description for particles in three-dimensions and Chern-Simons-Polyakov theory,” *Phys. Lett. B* **236**, 287 (1990).
- [31] M. S. Plyushchay, “The Model of relativistic particle with torsion,” *Nucl. Phys. B* **362**, 54 (1991).
- [32] S. R. Coleman and J. Mandula, “All possible symmetries of the S matrix,” *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [33] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **70**, 39 (1974).
- [34] E. Witten, “Supersymmetry and Morse theory,” *J. Diff. Geom.* **17**, 661 (1982).
- [35] K. Hori and C. Vafa, “Mirror symmetry,” arXiv:hep-th/0002222.
- [36] A. Strominger, S. T. Yau and E. Zaslow, “Mirror symmetry is T-duality,” *Nucl. Phys. B* **479**, 243 (1996) [arXiv:hep-th/9606040].
- [37] D. A. Cox and S. Katz, “Mirror symmetry and algebraic geometry,” *Providence, USA: AMS (2000) 469 p*
- [38] M. S. Plyushchay, “Minimal bosonization of supersymmetry,” *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 397 (1996) [arXiv:hep-th/9601141].
- [39] F. Correa and M. S. Plyushchay, “Hidden supersymmetry in quantum bosonic systems,” *Annals Phys.* **322**, 2493 (2007) [arXiv:hep-th/0605104].
- [40] F. Correa, L. M. Nieto and M. S. Plyushchay, “Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap Lamé equation,” *Phys. Lett. B* **644** (2007) 94 [arXiv:hep-th/0608096].
- [41] J. Gamboa, M. Plyushchay and J. Zanelli, “Three aspects of bosonized supersymmetry and linear differential field equation with reflection,” *Nucl. Phys. B* **543**, 447 (1999) [arXiv:hep-th/9808062].
- [42] D. P. Sorokin and D. V. Volkov, “(Anti)commuting spinors and supersymmetric dynamics of semions,” *Nucl. Phys. B* **409**, 547 (1993).
- [43] P. A. Horvathy, M. S. Plyushchay and M. Valenzuela, “Bosonized supersymmetry of anyons and supersymmetric exotic particle on the non-commutative plane,” *Nucl. Phys. B* **768**, 247 (2007) [arXiv:hep-th/0610317].
- [44] M. S. Plyushchay, Michel Rausch de Traubenberg and M. Valenzuela: Trabajo en progreso.
- [45] P. G. O. Freund, “Superstrings From Twentysix-Dimensions?,” *Phys. Lett. B* **151**, 387 (1985).
- [46] A. Casher, F. Englert, H. Nicolai and A. Taormina, “Consistent Superstrings As Solutions Of The D=26 Bosonic String Theory,” *Phys. Lett. B* **162**, 121 (1985).

- [47] F. Englert, H. Nicolai and A. Schellekens, “Superstrings From Twentysix-Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **274**, 315 (1986).
- [48] F. Englert, L. Houart and A. Taormina, “Brane fusion in the bosonic string and the emergence of fermionic strings,” *JHEP* **0108**, 013 (2001) [arXiv:hep-th/0106235].
- [49] A. Chattaraputi, F. Englert, L. Houart and A. Taormina, “The bosonic mother of fermionic D-branes,” *JHEP* **0209**, 037 (2002) [arXiv:hep-th/0207238].
- [50] S. M. Klishevich, M. S. Plyushchay and M. Rausch de Traubenberg, “Fractional helicity, Lorentz symmetry breaking and anyons,” *Nucl. Phys. B* **616**, 419 (2001) [arXiv:hep-th/0101190].
- [51] M. S. Plyushchay, “Majorana equation and exotics: Higher derivative models, anyons and noncommutative geometry,” *EJTP* **3**, No. 10 (2006) 17 [arXiv:math-ph/0604022].
- [52] R. Casalbuoni, “Majorana and the infinite component wave equations,” *PoS E MC2006*, 004 (2006) [arXiv:hep-th/0610252].
- [53] A. Zichichi, “Ettore Majorana: genius and mystery.” *CERN Cour.* **46 N6** (2006) 23 [PoS E MC2006 (2006) 017].
- [54] Y. S. Wu and A. Zee, “Comments On The Hopf Lagrangian And Fractional Statistics Of Solitons,” *Phys. Lett. B* **147**, 325 (1984).
- [55] S. Forte, “Quantum mechanics and field theory with fractional spin and statistics,” *Rev. Mod. Phys.* **64**, 193 (1992).
- [56] S. Rao, “An Anyon primer,” arXiv:hep-th/9209066.
- [57] D. P. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, “Statistical Mechanics Of Anyons,” *Nucl. Phys. B* **251**, 117 (1985).
- [58] A. L. Fetter, C. B. Hanna and R. B. Laughlin, “Random phase approximation in the fractional statistics gas,” *Phys. Rev. B* **39**, 9679 (1989).
- [59] C. Duval and P. A. Horvathy, “The Peierls substitution and the exotic Galilei group,” *Phys. Lett. B* **479**, 284 (2000) [arXiv:hep-th/0002233].
- [60] C. Duval and P. A. Horvathy, “Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane, and the Hall effect,” *J. Phys. A* **34**, 10097 (2001) [arXiv:hep-th/0106089].
- [61] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, “On Anyon Superconductivity,” *Int. J. Mod. Phys. B* **3**, 1001 (1989).
- [62] A. L. Fetter, R. B. Laughlin and C. B. Hanna, “Anyons and superconductivity: Random phase approximation,” *Int. J. Mod. Phys. B* **5**, 2751 (1991).
- [63] P. A. Horvathy and M. S. Plyushchay, “Anyon wave equations and the noncommutative plane,” *Phys. Lett. B* **595**, 547 (2004) [arXiv:hep-th/0404137].

- [64] R. Jackiw and V. P. Nair, “Relativistic wave equations for anyons,” *Phys. Rev. D* **43**, 1933 (1991).
- [65] M. S. Plyushchay, “Fractional spin: Majorana-Dirac field,” *Phys. Lett. B* **273**, 250 (1991).
- [66] J. L. Cortes and M. S. Plyushchay, “Linear differential equations for a fractional spin field,” *J. Math. Phys.* **35**, 6049 (1994) [arXiv:hep-th/9405193].
- [67] M. S. Plyushchay, “Deformed Heisenberg algebra and fractional spin field in (2+1)-dimensions,” *Phys. Lett. B* **320** (1994) 91 [arXiv:hep-th/9309148].
- [68] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, “Quantum Field Theory And Parastatistics,” *Tokyo, Japan: Univ. Pr. (1982) 489 P. Berlin, Germany: Springer (1982) 489p*
- [69] M. A. Vasiliev, “Quantization On Sphere And High Spin Superalgebras,” *JETP Lett.* **50**, 374 (1989) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **50**, 344 (1989)].
- [70] M. S. Plyushchay, “Deformed Heisenberg algebra with reflection,” *Nucl. Phys. B* **491**, 619 (1997) [arXiv:hep-th/9701091].
- [71] E. P. Wigner, “Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?,” *Phys. Rev.* **77**, 711 - 712 (1950).
- [72] L. M. Yang, “A Note on the Quantum Rule of the Harmonic Oscillator,” *Phys. Rev.* **84**, 788 - 790 (1951).
- [73] D. P. Sorokin and D. V. Volkov, “(Anti)commuting spinors and supersymmetric dynamics of semions,” *Nucl. Phys. B* **409**, 547 (1993).
- [74] M. S. Plyushchay, “Quantization of the classical $SL(2, \mathbb{R})$ system and representations of $SL(2, \mathbb{R})$ group,” *J. Math. Phys.* **34**, 3954 (1993).
- [75] R. Jackiw and V. P. Nair, “Anyon spin and the exotic central extension of the planar Galilei group,” *Phys. Lett. B* **480**, 237 (2000) [arXiv:hep-th/0003130].
- [76] G. S. Lozano, O. Piguet, F. A. Schaposnik and L. Sourrouille, “Nonrelativistic supersymmetry in noncommutative space,” *Phys. Lett. B* **630**, 108 (2005) [arXiv:hep-th/0508009].
- [77] J. Lukierski, I. Prochnicka, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, “Galilean exotic planar supersymmetries and nonrelativistic supersymmetric wave equations,” *Phys. Lett. B* **639**, 389 (2006) [arXiv:hep-th/0602198].
- [78] P. A. Horvathy and M. S. Plyushchay, “Non-relativistic anyons and exotic Galilean symmetry,” *JHEP* **0206**, 033 (2002) [arXiv:hep-th/0201228].
- [79] J. L. Cortes and M. S. Plyushchay, “Anyons as spinning particles,” *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 3331 (1996) [arXiv:hep-th/9505117].

- [80] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, “On the Dirac theory of spin 1/2 particle and its nonrelativistic limit,” *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [81] D. Tz. Stoyanov and I. T. Todorov, “Majorana representations of Lorentz group and infinite-component fields,” *J. Math. Phys.* **9**, (1968) 2146.
- [82] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, “Quantum theory of the infinite-component Majorana field and the relation of spin and statistics,” *Phys. Rev.* **D 1** (1970) 571.
- [83] C. Fronsdal, “Infinite Multiplets and the Hydrogen Atom,” *Phys. Rev.* **156** (1967) 1665; “Infinite-Component Field Theories, Fubini Sum Rules Completeness, And Current Algebra. I. Discrete Spectra,” *Phys. Rev.* **182** (1969) 1564; C. Fronsdal and R. White, “Infinite Multiplets and Crossing Symmetry. I. Three-Point Amplitudes,” *Phys. Rev.* **163** (1967) 1835.
- [84] E. Abers, I. T. Grodsky and R. E. Norton, “Diseases of infinite-component field theories,” *Phys. Rev.* **159** (1967) 1222.
- [85] Y. Nambu, “Infinite-Component Wave Equations with Hydrogenlike Mass Spectra,” *Phys. Rev.* **160** (1967) 1171.
- [86] G. Veneziano, “Construction of a crossing - symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories,” *Nuovo Cim. A* **57**, 190 (1968).
- [87] A. Neveu and J. H. Schwarz, “Factorizable Dual Model Of Pions,” *Nucl. Phys. B* **31** (1971) 86.
- [88] P. Ramond, “Dual Theory For Free Fermions,” *Phys. Rev. D* **3**, 2415 (1971).
- [89] S. Mandelstam, “Dual - Resonance Models,” *Phys. Rept.* **13** (1974) 259.
- [90] F. Gliozzi, J. Scherk and D. I. Olive, “Supergravity And The Spinor Dual Model,” *Phys. Lett. B* **65** (1976) 282.
- [91] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Supersymmetrical Dual String Theory,” *Nucl. Phys. B* **181**, 502 (1981).
- [92] L. P. Staunton, “Covariant Heisenberg Picture Of A Relativistic Positive-Energy Theory: The Operator Algebra Of The Rigid String,” *Phys. Rev. D* **13**, 3269 (1976).
- [93] P. A. Horvathy, M. S. Plyushchay and M. Valenzuela, “Bosonized supersymmetry from the Majorana-Dirac-Staunton theory and massive higher-spin fields,” *Phys. Rev. D* **77**, 025017 (2008) [arXiv:0710.1394 [hep-th]].
- [94] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, “Supermembranes and eleven-dimensional supergravity,” *Phys. Lett. B* **189** (1987) 75.
- [95] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, “Properties of the eleven-dimensional super membrane theory,” *Annals Phys. (N.Y.)* **185** (1988) 330

- [96] J. A. de Azcarraga, J. P. Gauntlett, J. M. Izquierdo and P. K. Townsend, “Topological extensions of the supersymmetry algebra for extended objects,” *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2443.
- [97] J. P. Gauntlett, G. W. Gibbons, C. M. Hull and P. K. Townsend, “BPS states of $D = 4$ $N = 1$ supersymmetry,” *Commun. Math. Phys.* **216**, 431 (2001) [arXiv:hep-th/0001024].
- [98] J. de Boer, F. Harmsze and T. Tjin, “Nonlinear finite W symmetries and applications in elementary systems,” *Phys. Rept.* **272**, 139 (1996) [arXiv:hep-th/9503161].
- [99] S. Forste and A. Kehagias, “Zero-branes in 2+1 dimensions,” [arXiv:hep-th/9610060].
- [100] H. F. Ahner, “Gravitation and positive energy wave equations,” *Phys. Rev.* **D 11** (1975) 3384; “Action principle for spin 1/2 wave equations,” *Phys. Rev.* **D 13** (1976) 250.
- [101] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda and C. C. Chiang, “The Dirac positive energy wave equation with parbose internal variables,” *Phys. Rev.* **D 25** (1982) 3237.
- [102] I. A. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf and D. P. Sorokin, “OSp supergroup manifolds, superparticles and supertwistors,” *Phys. Rev.* **D 61** (2000) 065009 [arXiv:hep-th/9907113].
- [103] I. A. Bandos, J. Lukierski and D. P. Sorokin, “The $OSp(1|4)$ superparticle and exotic BPS states,” [arXiv:hep-th/9912264].
- [104] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, “Superalgebra of higher spins and auxiliary fields,” *Int. J. Mod. Phys. A* **3** (1988) 2983.
- [105] C. Fronsdal, “Massless fields with integer spin,” *Phys. Rev. D* **18** (1978) 3624; J. Fang and C. Fronsdal, “Massless fields with half integral spin,” *Phys. Rev. D* **18** (1978) 3630.
- [106] S. Fedoruk and V. G. Zima, “Bitwistor formulation of massive spinning particle,” [arXiv:hep-th/0308154].
- [107] S. Fedoruk and J. Lukierski, “Massive relativistic particle models with bosonic counterpart of supersymmetry,” *Phys. Lett.* **B 632** (2006) 371 [arXiv:hep-th/0506086].
- [108] J. A. de Azcarraga, A. Frydryszak, J. Lukierski and C. Miquel-Espanya, “Massive relativistic particle model with spin from free two-twistor dynamics and its quantization,” *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 105011 [arXiv:hep-th/0510161].
- [109] I. Bars and B. Orcal, “Generalized twistor transform and dualities, with a new description of particles with spin, beyond free and massless,” *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 104015 [arXiv:hep-th/0704.0296].
- [110] H. van Dam and L. C. Biedenharn, “An explicit model exhibiting a generalization of supersymmetry,” *Phys. Lett. B* **81** (1979) 313.

-
- [111] S. Naka, “An approach to the Bose description of fermions,” *Prog. Theor. Phys.* **59**, 2107 (1978).
- [112] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, “Quantum theory of non-commutative fields,” *JHEP* **0303**, 058 (2003) [arXiv:hep-th/0301248].
- [113] J. Gamboa and J. Lopez-Sarrion, “U(1) noncommutative gauge fields and magnetogenesis,” *Phys. Rev. D* **71**, 067702 (2005) [arXiv:hep-th/0501034].